Zimná škola zo symplektickej geometrie
Bratislava, 5.-9. 2. 2007

Marián Fecko   Július Korbaš
Martin Niepel   Pavol Ševera

Európsky **sociálny** fond

Predslov

Zimná škola zo symplektickej geometrie sa uskutočnila v dňoch 5.-9. 2. 2007 na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky UK Bratislava. Bola myslená ako jednoduchý úvod do symplektickej geometrie aj jej aplikácií, ktorý by bol vhodný pre študentov matematiky aj fyziky. Pôvodne sme očakávali do 30 účastníkov; napokon sa zúčastnilo 62 ľudí, z toho asi polovica z Českej republiky. Dúfame teda, že škola prispela k spolupráci a porozumeniu medzi fyzikmi a matematikmi, ako aj medzi Čechmi a Slovákmi.

Prednášajúci jednotlivých prednášok sú v tomto zborníku vyznačení iniciálami: Marián Fecko (MF), Július Korbaš (JK), Martin Niepel (MN), Pavol Ševera (PŠ).

Zimná škola bola uskutočnená v rámci projektu ESF JPD 3 2005/NP1-013, Iniciovanie centra pokročilých štúdií z fyziky. Na jej uskutočnenie finančne prispeli Nadácia SPP, pán a pani Adrián Vološin a Iveta Batyková a Slovenská fyzikálna spoločnosť. Všetkým srdečne ďakujeme!

Denis Kochan a Pavol Ševera, organizátori

Obsah

PREDNÁŠKA 1

Diferenciálne formy 1 (MF)

`Motto: Symplektická geometria bez foriem je ako rastlina bez listov.`

- Lineárna algebra foriem (tenzory, objemy $\mapsto$ formy, operácie na nich)
- Formy na variete (súradnicové vyjadrenie, algebraické operácie)
- Pull-back, vonkajšia derivácia, Lieova derivácia foriem, Cartanov vzorec $\mathcal{L}_V = i_V d + d i_V$ a podobne

Táto Zimná škola sľubovala, že je pre tých, „ktorí by sa chceli *oboznámiť so základmi* symplektickej geometrie." Centrálnym objektom symplektickej geometrie je istá špeciálna *diferenciálna forma*. Preto si v úplne prvej prednáške povieme (pripomenieme) niekoľko elementárnych faktov o diferenciálnych formách všeobecne. Nie veľa, vrcholom bude Cartanov vzorec $\mathcal{L}_V = i_V d + d i_V$. Kto ho pozná a rozumie mu, nič nové ani zaujímavé sa tu nedozvie.

Je viacero spôsobov ako motivovať zavedenie vonkajších foriem (špeciálne diferenciálnych). Jeden z nich vychádza zo snahy počítať objemy rovnobežnostenov a vyústi do integrovania foriem na varietách. Integrovanie priblíži vo svojej prednáške Paľo Ševera. V mojej budú základy lineárnej algebry foriem, algebry foriem na variete a diferenciálneho počtu foriem.
Začnime tou lineárnou algebrou.
Duálny priestor. Majme n-rozmerný vektorový priestor L. Pripomeňme si najprv pojem *duálneho* priestoru: je to priestor lineárnych zobrazení

$$\alpha : L \to \mathbb{R} \qquad v \mapsto \alpha(v) \equiv \langle \alpha, v \rangle \in \mathbb{R}$$

Prvky L voláme vektory a prvky L^* *kovektory.* V L^* existuje prirodzená lineárna štruktúra

$$\langle \alpha + \lambda\beta, v \rangle := \langle \alpha, v \rangle + \lambda \langle \beta, v \rangle \qquad\qquad \alpha, \beta \in L^*, \lambda \in \mathbb{R}$$

takže výraz $\langle\ .\ ,\ .\ \rangle$ je lineárny *v oboch* okienkach. Ak zafixujeme v L ľubovoľnú bázu e_a, v L^* sa dá zaviesť n kusov kovektorov e^a vzťahmi

$$\langle e^a, v \rangle \equiv \langle e^a, v^b e_b \rangle := v^a \qquad \text{a špeciálne} \qquad \langle e^a, e_b \rangle := \delta^a_b$$

Ľahko sa overí, že tieto kovektory tvoria bázu priestoru L^*, takže ľubovoľný kovektor má (jednoznačný) rozklad

$$\alpha = \alpha_a e^a \qquad \alpha_a := \langle \alpha, e_a \rangle$$

Tenzory typu $(0, p)$. Zobrazenie t, ktoré priradí p kusom vektorov (jedno) reálne číslo

$$t : L \times \cdots \times L \to \mathbb{R} \qquad v, \ldots, w \mapsto t(v, \ldots, w) \in \mathbb{R}$$

pričom výsledné číslo zavisí lineárne od každého argumentu zvlášť (povie sa, že zobrazenie je *polylineárne* alebo *multilineárne*), sa volá *tenzor* typu $(0, p)$. Špeciálne prípady sú kovektory ($p = 1$) a bilineárne formy ($p = 2$). Pre $p = 0$ sa definuje, že tenzory typu $(0, 0)$ sú jednoducho čísla (nemám ani jeden vektor a mám tomu aj tak priradiť číslo $\Rightarrow$ musím to číslo mať už na začiatku.) Tenzory typu $(0, p)$ tvoria prirodzene (podobne ako to bolo v špeciálnom prípade L^*) lineárny priestor $T_p^0(L)$, ak sa položí

$$(t+\lambda s)(v,\dots,w) := t(v,\dots,w) + \lambda s(v,\dots,w)$$

Aký je jeho rozmer? Ak pre všemožné $a,\dots,b = 1,\dots,n$ zavedieme tenzory $e^a \otimes \dots \otimes e^b$ vzťahom

$$(e^a \otimes \dots \otimes e^b)(v,\dots,w) := v^a \dots w^b \tag{1}$$

a špeciálne

$$(e^a \otimes \dots \otimes e^b)(e_c,\dots,e_d) = \delta^a_c \dots \delta^b_d \tag{2}$$

tak sa ľahko overí, že tvoria bázu priestoru $T_p^0(L)$, takže ľubovoľný tenzor má (jednoznačný) rozklad

$$t = t_{a\dots b} e^a \otimes \dots \otimes e^b \qquad t_{a\dots b} := t(e_a,\dots,e_b) \tag{3}$$

Rozmer priestoru $T_p^0(L)$ je teda n^p (čísla $t_{a\dots b}$ sú *komponenty* tenzora t voči báze (2)).

▼ Pripomeňme, ako je definovaný *tenzorový súčin* (operácia žiarovka): ak t a s sú typu $(0,p)$ a $(0,q)$, tak $t\otimes s$ je typu $(0,p+q)$ a funguje takto:

$$(t\otimes s)(u,\dots,v,w,\dots,z) := t(u,\dots,v)s(w,\dots,z)$$
$$\text{a teda} \qquad (t\otimes s)_{a\dots bc\dots d} = t_{a\dots b} s_{c\dots d}$$

Overí sa, že je asociatívny (plus bilineárny a nekomutatívny) a že (2) je špeciálny prípad. ▲

Formy v L. Uvažujme n kusov vektorov $v,\dots,w$ a natiahnime na ne *rovnobežnosten*. Predstavme si, že by sme chceli vyrátať jeho *objem*. Tento objem je iste nejaké reálne číslo, takže vedieť vyrátať spomínaný objem znamená poznať isté *zobrazenie*

$$\alpha : L\times\dots\times L \to \mathbb{R} \qquad v,\dots,w \mapsto \alpha(v,\dots,w) \in \mathbb{R}$$

Z obrázkov v dvoj- a trojrozmernom priestore nahliadneme, že toto zobrazenie je lineárne v každom argumente.

(S tou linearitou to nie je celkom triviálne, ak v lineárnych kombináciách uvažujeme aj *záporné* koeficienty (čo, samozrejme, požiadavka linearity *obsahuje*). Napríklad chceme, aby $\alpha(-v,\dots,w) = -\alpha(v,\dots,w)$, čo ale znamená, že pripúšťame aj *záporné objemy*. Keď sme už boli pristihnutí, čestne priznávame, že naozaj pripúšťame. To, čo počítame (a čo je dané uvažovaným lineárnym zobrazením), sa presnejšie volá *orientovaný objem*.)

Vzorec pre objem je teda daný nejakým tenzorom typu $(0,n)$. Tento tenzor je však dosť špeciálny, lebo musí zabezpečiť prirodzenú požiadavku, aby „sploštutým" (oficiálne *degenerovaným*) rovnobežnostenom priradil *nulový objem*. Degenerovaný rovnobežnosten spoznám tak, že sa naťahuje na vektory, ktoré nie sú lineárne nezávislé (to, čo sa na ne naťahuje, teda má menší rozmer, ako keby boli lineárne nezávislé). Ak má mať každý degenerovaný rovnobežnosten nulový objem, zobrazenie α musí byť *úplne antisymetrické*.

▼ Chceme, aby *pre každý* vektor w platilo $\alpha(\dots,w,\dots,w,\dots) = 0$ (lebo dva vektory sú rovnaké, takže rovnobežnosten je splasnutý). Potom ale

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha(\dots,v+u,\dots,v+u,\dots) \\
&= \alpha(\dots,v,\dots,v,\dots) + \alpha(\dots,u,\dots,u,\dots) \\
&+ \alpha(\dots,v,\dots,u,\dots) + \alpha(\dots,u,\dots,v,\dots) \\
&= 0 + 0 + \alpha(\dots,v,\dots,u,\dots) + \alpha(\dots,u,\dots,v,\dots)
\end{aligned}$$

takže

$$\alpha(\dots, v, \dots, u, \dots) = -\alpha(\dots, u, \dots, v, \dots) \tag{4}$$

▲

Máme tak celkom dobrú motiváciu študovať úplne antisymetrické tenzory typu $(0, n)$. A aby sme mohli počítať aj objemy menejrozmerných rovnobežnostenov, ako je rozmer celého priestoru (napríklad plochu štvorca v *troj*rozmernom priestore), potrebujeme všeobecne aj úplne antisymetrické tenzory typu $(0, p)$ v n-rozmernom priestore $(0 \le p \le n)$. Takéto tenzory sa volajú *p-formy* v (n-rozmernom) lineárnom priestore L. Dajú sa (ako všetky tenzory) lineárne kombinovať a teda tvoria lineárny priestor. Je to podpriestor priestoru $T^0_p(L)$ a budeme ho označovať $\Lambda^p L^*$. Prípady $p = 0, 1$ sú výnimočné, lebo tam antisymetria nemá zmysel a tie sa iba prirodzene dodefinujú:

$$\Lambda^0 L^* := T^0_0(L) \equiv \mathbb{R} \qquad \Lambda^1 L^* := T^0_1(L) \equiv L^*$$

Definícia komponent (3) a vlastnosť (4) ukazujú, že (aj) komponenty foriem sú úplne antisymetrické

$$\alpha_{\dots a \dots b \dots} = -\alpha_{\dots b \dots a \dots} \qquad \text{takže} \qquad \alpha_{a \dots b} = \alpha_{[a \dots b]}$$

Všimnime si, že tenzorový súčin „nerešpektuje formy”: ak tenzorovo vynásobím dve formy, výsledok už všeobecne nie je forma (výsledný tenzor nemá *úplnú* antisymetriu). To by bolo dosť mrzuté, keby sa to nedalo opraviť. Ale dá sa. Zaregistrujeme totiž možnosť dôležitej *projekcie* tenzorov na *podpriestor* foriem (vydelenie (úplne) *antisymetrickej časti* tenzora):

$$\text{Alt} \,: T^0_p(L) \to \Lambda^p L^* \qquad t_{a \dots b} \mapsto t_{[a \dots b]} \qquad \text{Alt} \circ \text{Alt} = \text{Alt}$$

Pomocou nej ľahko dodatočne opravíme, čo tenzorový súčin trochu nezvládol - po tenzorovom súčine foriem aplikujeme na výsledok ešte projekciu na (úplne) antisymetrickú časť a výsledok *už bude* formou. Tento súčin sa volá *vonkajší súčin* foriem

(5)

$$\alpha \wedge \beta := \frac{(p+q)!}{p!q!} \text{Alt}\,(\alpha \otimes \beta) \qquad \text{takže} \qquad (\alpha \wedge \beta)_{a \dots bc \dots d} = \frac{(p+q)!}{p!q!} \alpha_{[a \dots b} \beta_{c \dots d]}$$

Tento súčin má nasledujúce užitočné vlastnosti:

	bilinearita	$\alpha \wedge (\beta + \lambda\tau)$	$= \alpha \wedge \beta + \lambda \alpha \wedge \tau$
(6)		$(\beta + \lambda\tau) \wedge \alpha$	$= \beta \wedge \alpha + \lambda \tau \wedge \alpha$
(7)	asociatívnosť	$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$	$= \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$
(8)	$\mathbb{Z}$-graduovaná komutatívnosť	$\alpha \wedge \beta$	$= (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$
(9)	a špeciálne pre bázu 1-foriem	$e^a \wedge e^b$	$= -\, e^b \wedge e^a$

(V prvých dvoch riadkoch je $\lambda \in \mathbb{R}$, v predposlednom je α p-forma a β je q-forma.)

Rozklad formy podľa bázy sa dá zapísať nielen cez tenzorové súčiny (to sa určite dá, veď je to len špeciálny tenzor), ale aj tak, že bude obsahovať výlučne vonkajšie súčiny:

$$\alpha = \frac{1}{p!}\, \alpha_{a \dots b}\; e^a \wedge \dots \wedge e^b \tag{10}$$

Príklad: keď sa vzorec (10) rozpíše na drobné, tak v trojrozmernom lineárnom priestore L s bázou e_1, e_2, e_3 (a duálnou e^1, e^2, e^3 v L^*) dostávame nasledujúce vyjadrenia najvšeobecnejších p-foriem:

$$\begin{array}{ll} p=0 & \alpha = k_1 \\ p=1 & \alpha = k_1 e^1 + k_2 e^2 + k_3 e^3 \\ p=2 & \alpha = k_1 e^1 \wedge e^2 + k_2 e^2 \wedge e^3 + k_3 e^1 \wedge e^3 \\ p=3 & \alpha = k_1 e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \end{array}$$

kde k_i sú ľubovoľné konštanty.
Zápis (10) je mimoriadne vhodný pre praktické manipulácie s formami. Napríklad z vlastností $\wedge$ (pozri (6) - (9)) vyplýva, že celá práca pri výpočte vonkajšieho súčinu $\alpha \wedge \beta$ takto rozložených foriem spočíva v týchto krokoch:

- zápise rozložených foriem za sebou
- roznásobení členov (každý s každým)
- presunutí všetkých konštánt dopredu
- *vyškrtnutí* členov, ktoré obsahujú niektorý bázový kovektor e^a *viac ako raz* (taký člen je *nulový* vďaka *anti*komutácii bázových kovektorov (9): $e^a \wedge e^b = -e^b \wedge e^a \;\Rightarrow e^1 \wedge e^1 = e^2 \wedge e^2 = \cdots = 0$).

Nech napríklad opäť $\dim L = 3$, báza L^* je e^1, e^2, e^3 a nech

$$\alpha = 2e^1 + e^3 \qquad \beta = -3e^1 \wedge e^3 + 4e^2 \wedge e^3$$

Potom

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= (2e^1 + e^3) \wedge (-3e^1 \wedge e^3 + 4e^2 \wedge e^3) \\ &= -6\underbrace{e^1 \wedge e^1}_{0} \wedge e^3 + 8e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 - 3\underbrace{e^3 \wedge e^1}_{-e^1 \wedge e^3} \wedge e^3 + 4\underbrace{e^3 \wedge e^2}_{-e^2 \wedge e^3} \wedge e^3 = \\ &= 8e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 + 3e^1 \wedge \underbrace{e^3 \wedge e^3}_{0} - 4e^2 \wedge \underbrace{e^3 \wedge e^3}_{0} = \\ &= 8e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \end{aligned}$$

Všimneme si, že komponenty p-foriem majú p indexov. Špeciálne komponenty 1-foriem sú jednoindexové objekty a komponenty 2-foriem sú *dvojindexové* objekty, pričom oba indexy prebiehajú rovnaký počet hodnôt (v n-rozmernom priestore 1 až n). To znamená, že komponenty dva-foriem môžeme graficky zobrazovať ako štvorcové *antisymetrické matice*. Príklad: ak uvažujem *štvorrozmerný* priestor L, tak jedna konkrétna identifikácia 2-formy a matice jej komponent je

$$\alpha = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 \qquad \leftrightarrow \qquad \alpha_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Veľmi dôležitou (a zároveň jednoduchou) algebraickou operáciou na formách je *vnútorný súčin* formy s vektorom. Pre daný vektor $v \in L$ to je zobrazenie $\alpha \mapsto i_v \alpha \equiv v \lrcorner\, \alpha$, ktoré spočíva v tom, že vektor v dosadíme ako prvý argument do p-formy α, t.j.

$$\begin{aligned} (i_v\alpha)(u, \dots, w) &:= \alpha(v, u, \dots, w) \qquad && \alpha \in \Lambda^p L^*,\ p \geq 1 \\ i_v \alpha &:= 0 && p = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Vzhľadom na mimoriadnu jednoduchosť svojho zavedenia má až prekvapujúco veľa zaujímavých (a pre praktické manipulácie užitočných) vlastností. Spomeňme tieto:

$$
\begin{aligned}
(i_v\alpha)_{a\dots b} &= v^c\alpha_{ca\dots b} && \text{komponentný vzorček}\\
i_v i_w &= -i_w i_v && \text{antikomutatívnosť}\\
i_{v+\lambda w} &= i_v + \lambda i_w && \text{linearita}\\
i_v(\alpha+\lambda\beta) &= i_v\alpha + \lambda\, i_v\beta && \text{linearita (iná)}\\
i_v(\alpha\wedge\beta) &= (i_v\alpha)\wedge\beta + (\hat\eta\alpha)\wedge(i_v\beta) && \text{grad. Leibnizovo pravidlo}
\end{aligned}
$$

Formy na variete. Pripomeňme, že varietu robí varietou to, že na nej v okolí každého bodu fungujú *lokálne súradnice* $(x^1,\dots,x^n)$. Ukazuje sa, že v každom bode P variety M existuje kanonický n-rozmerný lineárny priestor, *dotykový priestor* v P. Jeho prvky sa volajú *vektory v bode* P a samotný priestor sa označuje T_PM. Ako bázu tohoto priestoru môžeme zobrať *súradnicovú bázu* $\partial_1|_P,\dots,\partial_n|_P$. *Duálnu* bázu k nej tvoria kovektory $dx^1|_P,\dots,dx^n|_P$ (je to báza *kodotykového* priestoru T^*_PM). Ak na týchto symboloch vynecháme referenčný bod P, dostaneme „bázové" vektorové a kovektorové *polia*; sú bázové v tom zmysle, že ich hodnoty v každom bode P poskytujú bázu dotykového resp. kodotykového priestoru v P (teda netvoria bázu nad $\mathbb{R}$ pre všetky vektorové polia!).

Formy sa na varietu dostanú jednoducho tak, že sa ako priestor L vezme *dotykový* priestor T_PM. Potom je z (10) zrejmé, že všeobecná p-forma na variete sa dá zapísať (už ako pole v súradnicovej oblasti) v tvare

$$\alpha = \frac{1}{p!}\,\alpha_{i\dots j}(x)\,dx^i\wedge\dots\wedge dx^j \tag{12}$$

Priestor p-foriem na variete M sa označuje $\Omega^p(M)$.
Príklad: Vzorec (12) pre dvojrozmernú sféru S^2 so súradnicami ϑ,φ hovorí, že tam máme nasledujúce lokálne vyjadrenia najvšeobecnejších p-foriem:

$$
\begin{aligned}
p&=0 && \alpha = f_1(\vartheta,\varphi)\\
p&=1 && \alpha = f_1(\vartheta,\varphi)\,d\vartheta + f_2(\vartheta,\varphi)\,d\varphi\\
p&=2 && \alpha = f_1(\vartheta,\varphi)\,d\vartheta\wedge d\varphi
\end{aligned}
$$

kde $f_i(\vartheta,\varphi)$ sú ľubovoľné (hladké) funkcie na sfére.

S formami na variete môžeme „pobodovo" robiť všetky operácie, ktoré poznáme z algebry foriem v lineárnom priestore L. Napríklad na sfére S^2 môžeme robiť výpočty typu

$$
\begin{aligned}
[\sin\varphi\,d\vartheta]\wedge[\cos\vartheta\,d\varphi] &= \cos\vartheta\sin\varphi\,d\vartheta\wedge d\varphi\\
i_{3\partial_\varphi}[\cos\varphi\,d\vartheta\wedge d\varphi] &= -3\cos\varphi\,d\vartheta
\end{aligned}
$$

Na variete však pristupujú aj nové možnosti, lebo sa tu dá *derivovať* (a tiež integrovať, pozri prednášku Paľa Ševeru).

Diferenciálny počet foriem. Spomenieme tri operácie - pull-back, Lieovu deriváciu a vonkajšiu deriváciu.

Majme dve variety a zobrazenie medzi nimi, $f: M\to N$. Navyše ešte majme formu α na variete N. *Pull-back* f^* je operácia, ktorou sa forma α „ťahá späť" (= proti smeru f) a jeho výsledkom je už forma $f^*\alpha$ na M. Abstraktne to pobodovo funguje takto

$$(f^*\alpha)(v,\dots,w) := \alpha(f_*v,\dots,f_*w)$$

kde f_*v je štandardné označenie pre *push-forward* vektora v („tlačíme ho dopredu", z bodu P na M do bodu $f(P)$ na N).

[Pull-back *nie je* špecifikum foriem. Dá sa rovnako dobre robiť s hocijakými tenzormi s dolnými indexmi (nemusia byť teda úplne antisymetrické; príklad - indukovaný metrický tenzor), ba niekedy (keď existuje hladké inverzné zobrazenie f^{-1}) dokonca s *ľubovoľnými* tenzormi (môžu mať aj horné indexy).]

Odtiaľ hneď vychádzajú jeho kľúčové vlastnosti

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta) \qquad f^*(d\Phi) = d(f^*\Phi) = d(\Phi \circ f)$$

a z nich ihneď dostávame vzorec na výpočet pull-backu formy zadanej v súradniciach:

$$\begin{aligned} f^*\alpha \equiv f^* &\left(\frac{1}{p!}\, \alpha_{a\dots b}(y)\, \overbrace{dy^a \wedge \dots \wedge dy^b}^{p \text{ členov}} \right) \\ &= \frac{1}{p!}\, \alpha_{a\dots b}(y(x))\; J^a_i(x) \dots J^b_j(x) \underbrace{dx^i \wedge \dots \wedge dx^j}_{p \text{ členov}} \end{aligned}$$

Vidno, že pull-back nie je „diferenciálnou" operáciou na formách - nederivujú sa komponenty pull-backovanej formy, ale (len) funkcie $y^a(x)$, ktoré opisujú zobrazenie f. Naozajstnými diferenciálnymi operáciami na formách sú ale *Lieova a vonkajšia derivácia*, ktoré sa označujú $\mathcal{L}_V$ a d.

Uvažujme na M vektorové pole V. Ak každý bod posunieme o t po integrálnej krivke poľa V, vznikne zobrazenie $\Phi_t : M \to M$. Jeho pull-back Φ_t^* potom posúva tenzorové polia o t proti smeru integrálnych kriviek poľa. Rozdiel tenzora, ktorý sme späť do bodu x pritiahli a tenzora, ktorý v bode x bol (v limite priťahovania z čoraz bližšieho bodu) meria to, ako sa dané tenzorové pole A mení v smere poľa V. Presnou mierou tejto zmeny je *Lieova derivácia* $\mathcal{L}_V A := (d/dt)|_0 \Phi_t^* A$.

Lieova derivácia, podobne ako pull-back, *nie je* špecifikum foriem. Dá sa počítať z hocijakého tenzorového poľa.

Naopak *vonkajšia derivácia* funguje len na formách. Je „jadrom" základných diferenciálnych operácií vektorovej analýzy v E^3 (gradient, divergencia, rotácia a Laplaceov operátor), ale aj ich rôznych ďalekosiahlych zovšeobecnení. Najprirodzenejšou motiváciou pre jej zavedenie je integrálny počet - dá sa v ňom zaviesť „tak, aby platila Stokesova veta" (kľúčový výsledok integrálneho počtu foriem). Je to zobrazenie na formách, ktoré má nasledujúce vlastnosti:

1.	$d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$	zobrazenie stupňa $+1$
2.	$d(\alpha + \lambda\beta) = d\alpha + \lambda d\beta$	$\mathbb{R}-$ linearita $(\lambda \in \mathbb{R})$
3.	$df = df$	vpravo je *gradient* funkcie f
4.	$dd = 0$	nilpotentnosť
5.	$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (\hat{\eta}\alpha) \wedge d\beta$	grad. Leibnizovo pravidlo

t.j. d je *derivácia Cartanovej algebry stupňa* $+1$ (body 1.,2.,5.)), ktorá je navyše nilpotentná (bod 4.) a na stupni 0 sa zhoduje s gradientom funkcie (bod 3.). Ukazuje sa, že vlastnosti 1.-5. úplne charakterizujú operátor d a vyplýva z nich komponentný vzorec

$$(d\alpha)_{i\dots jk} := (-1)^p\ (p+1)\ \alpha_{[i\dots j,k]} \qquad \alpha \in \Omega^p(M)$$

Často sa však vypočíta vonkajšia derivácia konkrétnej formy rýchlejšie použitím jej vlastností 1.-5. ako z uvedeného komponentného vzorca. Napríklad

$$d(xdy - ydz) = dx \wedge dy + x \wedge ddy - dy \wedge dz - y \wedge ddz = dx \wedge dy - dy \wedge dz$$

Na záver spomeňme niekoľko užitočných identít, ktoré platia medzi zavedenými operáciami na formách. Dávajú do súvisu Lieovu deriváciu, vonkajšiu deriváciu, vnútorný súčin a pull-back foriem a často sa využívajú aj v symplektickej geometrii.

Ich dôkazy si môže skúsiť čitateľ rozmyslieť sám, prípadne sa inšpirovať literatúrou (sú napríklad aj v knihe [Fecko])

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_V &= i_V\ d + d\ i_V \\
[\mathcal{L}_V, i_W] &\equiv \mathcal{L}_V\ i_W - i_W\ \mathcal{L}_V = i_{[V,W]} \\
[d, \mathcal{L}_V] &\equiv d\ \mathcal{L}_V - \mathcal{L}_V\ d = 0 \\
[d, f^*] &\equiv d\ f^* - f^* d = 0 \\
d\alpha(U,V) &= U(\alpha(V)) - V(\alpha(U)) - \alpha([U,V]) \\
d\beta(U,V,W) &= U(\beta(V,W)) - V(\beta(U,W)) + W(\beta(U,V)) \\
&\quad - \beta([U,V],W) + \beta([U,W],V) - \beta([V,W],U) \\
&= \{U(\beta(V,W)) - \beta([U,V],W)\} + \text{cykl.}
\end{aligned}$$

PREDNÁŠKA 2

Hamiltonovská mechanika 1 (MF)

- Cesta od Hamiltonových rovníc k Poissonovmu tenzoru a od neho k symplektickej forme
- Bezsúradnicový zápis Hamiltonových rovníc pomocou symplektickej formy
- Hamiltonovske polia a ich vlastnosti
- Hamiltonovský tok Φ_t^f generovaný funkciou f, invariantnosť formy ω voči nemu

V celej tejto prednáške sa obmedzíme na prípad, keď hamiltonián nezávisí explicitne od času (sústava rovníc je autonómna). Čo treba urobiť, keď to tak nie je, spomenieme neskôr.

Uvažujme *Hamiltonove kanonické rovnice*

$$\dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a} \qquad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a} \qquad a = 1, \dots n \tag{13}$$

známe z kurzu teoretickej mechaniky. Keďže to je sústava obyčajných diferenciálnych rovníc prvého rádu, môžeme ich interpretovať ako rovnice pre integrálne krivky istého vektorového poľa na $\mathbb{R}^{2n}[q^a, p_a]$; konkrétne vidno, že ide o pole

$$\zeta_H = \frac{\partial H}{\partial p_a}\frac{\partial}{\partial q^a} - \frac{\partial H}{\partial q^a}\frac{\partial}{\partial p_a} \tag{14}$$

Cieľom je zbadať za týmito rovnicami nejakú „objektívnu" štruktúru, t.j. zapísať ich v bezsúradnicovom tvare. Premenujme najprv v $2n$-rozmernom fázovom priestore $\mathbb{R}^{2n}[q,p]$ súradnice nasledovne:

$$\begin{aligned} z^i \equiv (z^1, \dots, z^n, z^{n+1}, \dots, z^{2n}) :=& (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n) \equiv (q^a, p_a) \\ & i = 1, \dots, 2n; \ a = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{15}$$

(t.j. zabudnime na „neprirodzené" delenie všetkých súradníc na dve polovičky označené rôznymi písmenami a označme ich namiesto toho tak, ako sa to bežne robí na varietách - jedným písmenom z s indexami od 1 po rozmer variety). V týchto súradniciach dostávame pre vektorové pole (14) postupne vyjadrenie

$$\begin{aligned} \zeta_H &= \frac{\partial H}{\partial z^{n+1}}\frac{\partial}{\partial z^1} + \frac{\partial H}{\partial z^{n+2}}\frac{\partial}{\partial z^2} + \dots + \frac{\partial H}{\partial z^{2n}}\frac{\partial}{\partial z^n} \\ &\quad -\frac{\partial H}{\partial z^1}\frac{\partial}{\partial z^{n+1}} - \frac{\partial H}{\partial z^2}\frac{\partial}{\partial z^{n+2}} - \dots - \frac{\partial H}{\partial z^n}\frac{\partial}{\partial z^{2n}} \\ &\equiv (dH)_{n+1}\partial_1 + (dH)_{n+2}\partial_2 + \dots + (dH)_{2n}\partial_n \\ &\quad -(dH)_1\partial_{n+1} - (dH)_2\partial_{n+2} - \dots - (dH)_n\partial_{2n} \\ &\equiv (dH)_j \mathcal{P}^{ji}\partial_i \end{aligned} \tag{16}$$

takže rovnice (13) budú mať tvar

$$\dot{z}^i = \zeta_H^i(z) =: (\partial_j H)\mathcal{P}^{ji} \equiv (dH)_j \mathcal{P}^{ji} \qquad i = 1, \dots, 2n \tag{17}$$

Štvorcová $2n \times 2n$ konštantná matica $\mathcal{P}^{ji}$, ktorá sa objavuje v týchto zápisoch, obsahuje väčšinou nuly a len tu i tam jednotku alebo mínus jednotku; jej explicitný tvar je

$$\mathcal{P}^{ij}(z) = \begin{pmatrix} 0_n & -\mathbb{I}_n \\ \mathbb{I}_n & 0_n \end{pmatrix} = -\mathcal{P}^{ji}(z) \tag{18}$$

Vidíme, že je *antisymetrická* a (po drobnom výpočte aj že je) *nesingulárna.*

Ak sa pozrieme na výsledok (17) „tenzorovo”, zbadáme, že vektorové pole ζ_H, ktoré je za Hamiltonovými rovnicami, má dosť špeciálnu štruktúru - je poskladané z dvoch rôznych geometrických objektov (tenzorových polí), a to z kovektorového poľa dH (gradientu hamiltoniánu) a z tenzorového poľa $\mathcal{P}$ typu $(2,0)$

$$\dot{\gamma} = \zeta_H \qquad\qquad \zeta_H = \mathcal{P}(dH, \ .\ )$$

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^{ij}(z)\partial_i \otimes \partial_j = \frac{1}{2}\mathcal{P}^{ij}(z)\partial_i \wedge \partial_j = \frac{\partial}{\partial p_a} \wedge \frac{\partial}{\partial q^a}$$

Keďže matica $\mathcal{P}^{ji}$ komponent poľa $\mathcal{P}$ je antisymetrická, ide o *bivektorové pole* (= antisymetrické tenzorové pole typu $(2,0)$). Toto bivektorové pole sa vyskytuje ešte aj v inom známom výraze. Ak totiž počítame deriváciu ľubovoľnej funkcie f v smere vektorového poľa ζ_H (čiže ak skúmame, ako sa mení hodnota funkcie f v smere riešení $q^a(t), p_a(t)$ Hamiltonových rovníc (13)), dostávame z (14) a (16)

$$\begin{aligned} \dot{f} \equiv (d/dt)\ f(q^a(t), p_a(t)) = \zeta_H f &\overset{1.}{=} \frac{\partial H}{\partial p_a}\frac{\partial f}{\partial q^a} - \frac{\partial H}{\partial q^a}\frac{\partial f}{\partial p_a} \equiv \{H, f\} \\ &\overset{2.}{=} (dH)_j \mathcal{P}^{ji}\partial_i f \equiv \mathcal{P}(dH, dg) \end{aligned} \tag{19}$$

Vidíme, že bivektorové pole $\mathcal{P}$ umožňuje veľmi kompaktný zápis *Poissonovej zátvorky* ľubovoľných dvoch funkcií na fázovom priestore

$$\{f, g\} \equiv \frac{\partial f}{\partial p_a}\frac{\partial g}{\partial q^a} - \frac{\partial f}{\partial q^a}\frac{\partial g}{\partial p_a} = \mathcal{P}^{ij}(df)_i(dg)_j \equiv \mathcal{P}(df, dg) \tag{20}$$

Bivektorové pole $\mathcal{P}$, ku ktorému sme sa dopracovali, spĺňa ešte naviac istú diferenciálnu identitu, ktorá zabezpečuje platnosť *Jacobiho identity* pre Poissonove zátvorky

$$\{\{f, g\}, h\} + \text{ cykl. } \equiv \mathcal{P}(d(\mathcal{P}(df, dg)), dh) + \text{ cykl. } = 0 \tag{21}$$

Jej explicitný súradnicový tvar vychádza (nebudeme ho potrebovať)

$$\mathcal{P}^{r[i}\mathcal{P}^{jk]}{}_{,r} = 0 \tag{22}$$

Toto pole sme zatiaľ dostali len na konkrétnej variete $\mathbb{R}^{2n}$ a v konkrétnych súradniciach na nej, ale ukazuje sa výhodným zaviesť ho vo všeobecnom prípade ako novú užitočnú geometrickú štruktúru. Ľubovoľné bivektorové pole $\mathcal{P}$ na variete M, ktoré spĺňa spomínanú identitu sa volá *Poissonov tenzor* a varieta $(M, \mathcal{P})$ s takýmto tenzorom *poissonovská varieta.* Ako vidno z (20), v ľubovoľných súradniciach platia vyjadrenia

$$\mathcal{P}^{ij} = \{x^i, x^j\} \qquad\qquad \{f, g\} = (\partial_i f)\{x^i, x^j\}(\partial_j g) \tag{23}$$

Vektorové pole, ktoré má tvar

$$\zeta_f := \mathcal{P}(df, \ .\ ) \tag{24}$$

sa potom volá *hamiltonovské pole* generované funkciou f. Zatiaľ teda môžeme zhrnúť našu snahu o bezsúradnicovosť zápisu Hamiltonových rovníc takto: študovať dynamiku danú (lokálne) Hamiltonovými rovnicami (13) je to isté, ako študovať dynamiku zadanú globálne a bezsúradnicovo v tvare

$$\dot{\gamma} = \zeta_H \equiv \mathcal{P}(dH, \ .\ ) \tag{25}$$

kde $\mathcal{P}$ je Poissonov tenzor na variete M a H je preferovaná funkcia na tejto variete, *hamiltonián.*

Náš Poissonov tenzor je *nedegenerovaný* (pozri výpočet za (18)). Toto sa od všeobecného Poissonovho tenzora nepožaduje, my sa však ďalej budeme venovať len prípadom, keď to tak je. Vtedy sa totiž dá príbeh preložiť do reči diferenciálnych *foriem*, čím sa veci technicky výrazne zjednodušia (lebo na formách máme zázračne jednoduché a silné d apod.; navyše práve nedegenerovaný prípad je „paradigmatický"). [1]

Pozrime sa teraz na vyššie spomenutý prechod k "zrkadlovému obrazu" (nedegenerovanej) poissonovskej dynamiky, ktorým je *symplektická* dynamika. Definujme na fázovom priestore $\mathbb{R}^{2n}[q^a,p_a] \equiv \mathbb{R}^{2n}[z^i]$ tenzorové pole ω typu $\binom{0}{2}$, ktorého matica bude (až na znamienko) inverzná k matici $\mathcal{P}^{ij}$

$$\mathcal{P}\circ\omega = -\hat{1} \qquad \text{t.j.} \quad \mathcal{P}^{ik}\omega_{kj} = -\delta^i_j \tag{26}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega_{ij}(z) = \begin{pmatrix} 0_n & -\mathbb{I}_n \\ \mathbb{I}_n & 0_n \end{pmatrix} = -\,\omega_{ji}(z) \tag{27}$$

Je dosť ťažké si nevšimnúť, že matica ω_{ij} je (v týchto súradniciach) vlastne úplne rovnaká, ako matica $\mathcal{P}^{ij}$ z (18). Je teda tiež antisymetrická a nesingulárna, takže zodpovedá *nedegenerovanej 2-forme*.

Ak z komponent zostavíme celú 2-formu, dostaneme pre ňu v súradniciach z^i a (q^a,p_a) vyjadrenie

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{ij}dz^i\wedge dz^j = dp_a\wedge dq^a \tag{28}$$

Z neho vidno ďalšiu dôležitú vec, totiž že forma ω je ešte aj *uzavretá*, [2] teda že spĺňa $d\omega = 0$.

Spolu sme teda o forme ω zistili toto: je to uzavretá a nedegenerovaná 2-forma. Všeobecne sa definuje, že

- *symplektická forma* je uzavretá a nedegenerovaná 2-forma,
- *symplektická varieta* je varieta, na ktorej je definovaná symplektická forma a
- *symplektická geometria* [3] je časť geometrie, ktorá študuje symplektické variety.

Hamiltonove rovnice nám teda pomohli odhaliť, že fázový priestor je prirodzenou symplektickou varietou. Ukazuje sa, že symplektická forma sa podieľa na všetkom zaujímavom, čo sa vo fázovom priestore deje. Jej odhalenie je preto zásadným krokom k pochopeniu hamiltonovskej mechaniky.

Naša cesta k symplektickej forme sa začala v *párnorozmernom* (fázovom) priestore. Zo všeobecnej definície symplektickej formy nie je apriori jasné, či si takýto objekt naozaj nevyhnutne vyžaduje párny rozmer priestoru na ktorom žije, alebo či to bola len náhoda. Ľahko sa však nahliadne, sa sa to ináč naozaj nedá, t.j. že každá symplektická varieta je párnorozmerná.

Keďže (v nedegenerovanom prípade) tenzory $\mathcal{P}$ a ω sú podľa (27) navzájom inverzné, čokoľvek, do čoho vstupuje $\mathcal{P}$ sa dá vyjadriť cez ω. Pozrime sa napríklad, ako sa vyjadruje cez ω všeobecné hamiltonovské pole a Poissonova zátvorka dvoch funkcií. Najjednoduchšia cesta je uvidieť výsledok cez komponenty a potom si uvedomiť, čo to hovorí bezsúradnicovo.

---

[1] Bezsúradnicový zápis Hamiltonových rovníc v tvare (25) vychádzal z konkrétneho súradnicového vyjadrenia Poissonovho tenzora, zo zápisu $\mathcal{P} = \frac{\partial}{\partial p_a}\wedge\frac{\partial}{\partial q^a}$. V prednáške 3 sa však dozvieme, že definičné vlastnosti tohoto tenzora (nedegenerované bivektorové pole, ktoré spĺňa diferenciálnu identitu z (21), (22) zaručujú vždy možnosť presne takéhoto lokálneho vyjadrenia (je to "kanonický tvar" nedegenerovaného Poissonovho tenzora.

[2] Je dokonca *exaktná*, $\omega = d(p_a dq^a) = d\theta$, ale to nie je veľmi zaujímavé - v $\mathbb{R}^{2n}$ sú exaktné *všetky* uzavreté formy a keby sme to náhodou už mysleli dobudúcna na niečom inom, tak by to aj tak bolo len súradnicové - a teda *lokálne* - vyjadrenie (a lokálne to platí zasa vždy).

[3] Konečne sa teda vyjasnilo, o čom bude táto Zimná škola.

Vynásobme komponentný vzorček (24) maticou ω_{ij}:

$$\zeta_f^i = (df)_j \mathcal{P}^{ji} \qquad \Rightarrow \qquad \zeta_f^i \omega_{ik} = (df)_j \mathcal{P}^{ji} \omega_{ik} = (df)_j (-\delta_k^j) = -(df)_k$$

Získaná rovnica $\zeta_f^i \omega_{ik} = -(df)_k$ sa však dá ľahko zapísať v rýdzo formovom bezsúradnicovom jazyku ako

(29) $$i_{\zeta_f} \omega \equiv \zeta_f \lrcorner\, \omega = -df$$

Táto dôležitá rovnica je úplne ekvivalentná rovnici (24) - jedna aj druhá jednoducho definujú (to isté) hamiltonovské pole ζ_f generované (ľubovoľnou) funkciou f na fázovom priestore

(30) $$\zeta_f := \mathcal{P}(df, \ .\ ) \qquad \Leftrightarrow \qquad i_{\zeta_f} \omega \equiv \zeta_f \lrcorner\, \omega = -df$$

Výhodou „formovej" definície (29) je to, že s formami sa pracuje podstatne pohodlnejšie, ako s bivektorovými poľami. Z rovnice (30) sa napríklad ľahko ukáže (skúste si to!), že platí

(31) $$\mathcal{L}_{\zeta_f} \omega = 0 \qquad \zeta_f + \lambda \zeta_g = \zeta_{f+\lambda g} \qquad [\zeta_f, \zeta_g] = \zeta_{\{f,g\}}$$

Hamiltonovské polia teda zachovávajú symplektickú formu a tvoria (∞-rozmernú) *Lieovu algebru* (sú uzavreté voči lineárnym kombináciám nad $\mathbb{R}$ a komutátoru). Podobne sa jednoducho overí, že Jacobiho identita je v jazyku symplektickej formy ω ekvivalentná jej *uzavretosti*

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad d\omega = 0$$

▼ Ak rozpíšeme výraz $d\omega(\zeta_f, \zeta_g, \zeta_h)$ pomocou Cartanovho vzorca $d\beta(U, V, W) = \dots$ uvedeného na konci úvodnej prednášky o formách, dostaneme

$$d\omega(\zeta_f, \zeta_g, \zeta_h) = \ \cdots = \ 2(\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\})$$

▲

PREDNÁŠKA 3

Kanonické súradnice (PŠ)

Našim cieľom bude dokázať nasledujúce tvrdenie:

VETA 3.1. *Nech (M, ω) je symplektická varieta. V okolí každého bodu existujú lokálne súradnice x^i, p_i $(1 \leq i \leq \dim M/2)$, také, že*

$$\omega = \sum dp_i \wedge dx^i. \tag{32}$$

Prečo je táto veta zaujímavá? Z matematického hľadiska preto, lebo nám hovorí, že lokálne sú všetky symplektické variety danej dimenzie rovnaké. Jediné, čím sa môžu líšiť, je to, ako sú tieto lokálne kúsky globálne pozliepané. Symplektická geometria je teda symplektickou topológiou. No a z hľadiska Hamiltonovej mechaniky je zaujímavá preto, lebo hovorí, že lokálne je každá symplektická forma tvaru (32), ktorý dobre poznáme z kanonických súradníc. Nech teda vyrobíme symplektickú varietu ľubovoľným spôsobom (napr. symplektickou redukciou), vždy je to lokálne náš starý známy fázový priestor. A ešte jeden jednoduchý dôsledok vety: každá symplektická varieta je párnorozmerná.

Najprv si však dokážme jednoduchšie tvrdenie z lineárnej algebry:

VETA 3.2. *Nech (V, ω) je (konečnerozmerný) symplektický vektorový priestor. Potom existuje taká báza u_i, v^i priestoru V $(1 \leq i \leq \dim V/2)$, že*

$$\omega(u_i, u_j) = 0, \quad \omega(v^i, v^j) = 0 \quad \omega(u_i, v^j) = \delta_i^j,$$

čiže matica ω v tejto báze je (v blokovom zápise)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Dôkaz je veľmi jednoduchý. Vektor u_1 si zvoľme ľubovoľne (jediná požiadavka je, aby bol nenulový). Keďže ω je nedegenerovaná, existuje vektor v taký, že $\omega(u_1, v) \neq 0$, a teda aj vektor v^1 taký, že $\omega(u_1, v^1) = 1$. Napokon si všimnime, že keď zúžime ω na podpriestor

$$V_2 := \{w \in V;\ \omega(w, u_1) = \omega(w, v^1) = 0\},$$

tak zostane nedegenerovaná (prečo?). V priestore V_2 môžeme teda nájsť vektory u_2, v^2 také, že atď.

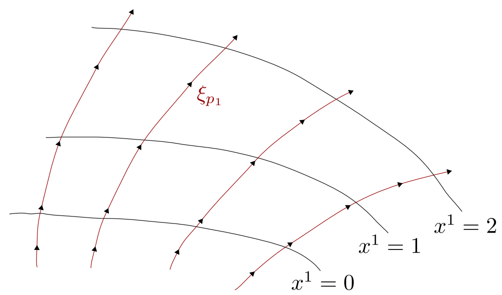
(Mimochodom, čo sa stane, ak pripustíme aj degenerované ω? Pre nejaké k bude $\omega|_{V_k} = 0$ (prečo?). Ako bude teda vyzerať ω vo vhodnej báze?)

Vráťme sa teraz k dôkazu vety 3.1. Dôkaz bude podobný ako v prípade vety 3.2. Skonštruujeme lokálne funkcie p_i a x^i tak, aby

$$\{p_i, p_j\} = 0, \quad \{x^i, x^j\} = 0, \quad \{p_i, x^j\} = \delta_i^j,$$

a opäť ich budeme vyrábať postupne.

Funkciu p_1 si zvoľme ľubovoľne, s jedinou podmienkou, aby $dp_1 \neq 0$ v zadanom bode $P \in M$ (v ktorého okolí konštruujeme lokálne súradnice). Hamiltonovské vektorové pole ξ_{p_1} generované funkciou p_1 je v okolí P nenulové, a preto existuje (možno v ešte menšom okolí) funkcia x^1 taká, že $\xi_{p_1} x^1 = 1$. Posledné tvrdenie plynie z vety o vypriamení vektorového poľa (nenulové vektorové pole je vo vhodných súradniciach rovné $\partial/\partial x^1$). Dá sa ale ukázať aj na obrázku: zvolíme si nadplochu transverzálnu k ξ_{p_1} a povieme si, že na nej je $x^1 = 0$. Potom tú nadplochu roznesieme tokom poľa ξ_{p_1} a dostaneme ostatné úrovne funkcie x^1.



Máme už teda funkcie p_1 a x^1 také, že $\{p_1, x^1\} = 1$. Všetky ostatné p_i a x^i $(i \geq 2)$ majú mať nulové Poissonove zátvorky s týmito dvoma funkciami, čiže majú byť konštantné pozdĺž integrálnych kriviek vektorových polí ξ_{p_1} a ξ_{x^1}.

Ako vyzerajú funkcie konštantné pozdĺž integrálnych kriviek vektorových polí ξ_{p_1} a ξ_{x^1}? Keďže vektorové polia ξ_{p_1} a ξ_{x^1} komutujú (prečo?), komutujú aj ich toky, čiže na M nám lokálne pôsobí $\mathbb{R}^2$. Hľadáme teda funkcie, ktoré sa pri tomto pôsobení nemenia. Polia ξ_{p_1} a ξ_{x^1} sú lineárne nezávislé (lebo $\{p_1, x^1\} = 1$; ako to z toho plynie?), teda pôsobenie je voľné. Lokálne teda môžeme napísať $M = \mathbb{R}^2 \times M_2$, kde $M_2 \subset M$ je zadané rovnicami $p_1 = 0$, $x^1 = 0$. Nemenné funkcie sa teda dajú stotožniť s funkciami na M_2. M_2 je ale symplektická podvarieta, čiže na nej nájdeme funkcie p_2 a x^2 také, že $\{p_2, x^2\} = 1$ atď. $\square$

Na záver sa pozrime na to, čo sa deje v prípade Poissonových variet. Ak je (M, π) Poissonova varieta a bivektor π je nenulový v bode $P \in M$, tak naďalej môžeme nájsť v jeho okolí funkcie p_1 a x^1 také, že $\{p_1, x^1\} = 1$, a teda lokálne $M = \mathbb{R}^2 \times M_2$. Varieta M_2 je opäť Poissonova (funkcie na M_2 stotožníme s funkciami na M konštantnými pozdĺž $\mathbb{R}^2$ a Poissonovu zátvorku proste spočítame na M) a môžeme teda pokračovať. Keď skončíme, získame lokálny rozklad

$$M = \mathbb{R}^{2k} \times M',$$

kde M' je Poissonova varieta s $\pi = 0$ v počiatku.

PREDNÁŠKA 4

Lineárna symplektická geometria (MN)

Veľa globálnych alebo zdanlivo nelineárnych vlastností objavujúcich sa v symplektickej geometrii môžeme pozorovať priamo v lineárnom symplektickom priestore, či pri jeho transformáciách. Tieto vlastnosti sú fakticky vlastnosťami jeho 2-formy ω, pričom podstatnú úlohu tu hrá jej nedegenerovanosť. Jej druhá vlastnosť– exaktnosť, a z nej vyplývajúce dôsledky, sa naopak objavia až na všeobecných, nelineárnych symplektických varietách.

Veľká časť výsledkov v tejto kapitole úrovňou zodpovedá cvičeniam k pokročilejšiemu kurzu lineárnej algebry, preto čitateľovi odporúčame prerieši̇ť si niektoré z uvádzaných príkladov samostatne. Na záver kapitoly tiež pripájame pár cvičení, ktoré môžu poskytnúť hlbší vhľad alebo iné pohľady na problematiku.

1. Symplektický vektorový priestor

V euklidovskom priestore $\mathbb{R}^{2n}$ s bázou $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ môžeme zaviesť antisymetrickú bilineárnu formu

$$\omega_0 = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2 + \cdots + dx_n \wedge dy_n,$$

ktorá sa dá pre vektory $z = (x, y)$, $z' = (x', y')$ prepísať aj ako

$$\omega_0(z, z') = \sum_j (x_j y'_j - y_j x'_j) = -(x, y) \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$$

$$= -z^T J_0 z' = z^T J_0^T z = \langle J_0 z \,, z' \rangle,$$

kde $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ je štandardný skalárny súčin. Euklidovský priestor $\mathbb{R}^{2n}$ s formou ω_0 je základným príkladom symplektického vektorového priestoru.

Vo všeobecnosti, *symplektický vektorový priestor* bude dvojica (V, ω), kde V je konečnorozmerný vektorový priestor a ω je nedegenerovaná antisymetrická bilineárna forma $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$. To znamená, že platí

(*antisymetria*) pre všetky $v, w \in V$

$$\omega(v, w) = -\omega(w, v),$$

(*nedegenerovanosť*) pre každé $v \in V$

$$\forall w \in V \quad \omega(v, w) = 0 \;\Rightarrow\; v = 0.$$

Pomocou nasledujúceho cvičenia sa dá ukázať, že z podmienky nedegenerovanosti formy ω vyplýva, že V musí mať párnu dimenziu.

Cvičenie 4.1. *Ukážte, že reálna antisymetrická matica s nepárnym počtom riadkov má nulu ako vlastnú hodnotu s nepárnou násobnosťou.*

Cvičenie 4.2. Ukážte, že platí: $dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n = \dfrac{1}{n!}\, \omega_0 \wedge \cdots \wedge \omega_0 = \dfrac{1}{n!} \bigwedge^n \omega_0$. Tiež ukážte, že pre symplektický vektorový priestor (V, ω) je podmienka nedegenerovanosti formy ω ekvivalentná s podminekou $\bigwedge^n \omega \neq 0$.

Lineárny symplektomorfizmus symplektického vektorového priestoru (V, ω) je taký izomorfizmus $\Psi : V \to V$ priestoru V, ktorý zachováva symplektickú formu ω. Platí teda

$$\Psi^* \omega = \omega,$$

kde pod označením $\Psi^*\omega$ rozumieme stiahnutú (pull–backovanú) 2-formu danú predpisom $\Psi^*\omega(v, w) = \omega(\Psi v, \Psi w)$ pre $v, w \in V$.

Lineárne symplektomorfizmy tvoria grupu, ktorú označujeme ako $Sp(V, \omega)$. Grupu symplektomorfizmov zachovávajúcu štandartnú symplektickú štruktúru na Euklidovskom priestore $\mathbb{R}^{2n}$ značíme ako $Sp(2n) = Sp(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$.

Poznámka: V kapitole 3 sme si ukázali, že v každom symplektickom vektorovom priestore dimenzie $2n$ existuje báza $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$ taká, že

$$\omega(u_j, u_k) = \omega(v_j, v_k) = 0 \qquad \text{a} \quad \omega(u_j, v_k) = \delta_{jk}.$$

Takúto bázu nazývame *symplektická báza.* Tiež sa dá ukázať, že existuje izomorfizmus (vektorových priestorov) $\Phi : \mathbb{R}^{2n} \to V$ taký, že $\Phi^*\omega = \omega_0$.

2. Grupa symplektických matíc $Sp(2n)$

Lineárny symplektomorfizmus $\Psi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ môžme reprezentovať reálnou maticou Ψ typu $2n \times 2n$. Podmienka $\Psi^*\omega_0 = \omega_0$ pre symplektomorfizmus dáva nasledujúci vzťah pre maticu Ψ:

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^{2n} \quad -v^T J_0 w = \omega_0(v, w) = \Psi^*\omega_0(v, w) = \omega_0(\Psi v, \Psi w) = -v^T \Psi^T J_0 \Psi w.$$

Preto pre maticu Ψ reprezentujúcu symplektomorfizmus musí platiť $\Psi^T J_0 \Psi = J_0$. Podobne, všetky matice spĺňajúce túto rovnosť nazývame symplektické.

Cvičenie 4.3. Uvažujme maticu $\Psi = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$, kde A, B, C, D sú bloky veľkosti $n \times n$. Potom Ψ je symplektická práve vtedy, ak k nej inverzná matica má tvar $\Psi^{-1} = \begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix}$.

Cvičenie 4.4. Ak sú Φ a Ψ symplektické matice, potom $\Phi\Psi$, Ψ^{-1} a Ψ^T sú tiež symplektické. **Pomôcka:** Prenásobte rovnosť $\Psi^T J_0 \Psi = J_0$ sprava maticou Ψ^{-1} a zľava $(\Psi^T)^{-1}$.

LEMMA 4.5. *Každá symplektická matica má determinant 1*

DÔKAZ. Vieme, že symplektická matica Ψ musí spĺňať $\Psi^*\omega_0 = \omega_0$. Preto aj $\bigwedge^n(\Psi^*\omega_0) = \bigwedge^n \omega_0$. Na druhej strane $\bigwedge^n(\Psi^*\omega_0) = \Psi^*(\bigwedge^n \omega_0) = (\det \Psi) \bigwedge^n \omega_0$, čiže $\det \Psi = 1$. □

LEMMA 4.6. *Nech $\Psi \in Sp(2n)$, potom ak λ je vlastnou hodnotou matice Ψ, aj λ^{-1} je jej vlastnou hodnotou s rovnakou násobnosťou. Vlastné hodnoty ± 1 (ak nimi sú) sa vyskytujú vždy s párnou násobnosťou. Vlastné podpriestory pre λ, λ', ak $\lambda\lambda \neq 1$ sú ortogonálne vzhľadom na formu ω, t.j. ak $\Psi z = \lambda z$ a $\Psi z' = \lambda' z'$ pre $\lambda\lambda' \neq 1$, potom $\omega(z, z') = 0$.*

DÔKAZ. Prvá časť tvrdenia vyplýva z toho, že Ψ^T a Ψ^{-1} sú podobné matice

$$\Psi^T = J_0 \Psi^{-1} J_0^{-1}.$$

Preto je celkový počet vlastných hodnôt, ktoré sa nerovnajú 1 alebo -1 párny. Ako vyplýva z predchádzajúcej lemy, súčin všetkých vlastných hodnôt je 1, preto aj vlastná hodnota -1 bude mať párnu násobnosť.

Ortogonalita vlastných podpriestorov vyplýva z rovnosti

$$\lambda\lambda' \langle J_0 z, z' \rangle = \langle J_0 \Psi z, \Psi z' \rangle = \langle J_0 z, z' \rangle.$$

□

Pozrime sa teraz na súvis grupy $Sp(2n)$ s ďalšími klasickými grupami. Pre toto porovnanie bude výhodné, ak grupu $GL(n,\mathbb{C})$ komplexných lineárnych transformácií vektorového priestoru $\mathbb{C}^n$ budeme reprezentovať pomocou reálnych matíc nasledovne: vektor $z=(x,y)$ v $\mathbb{R}^{2n}$ identifikujeme s vektorom $x+iy\in\mathbb{C}^n$, násobenie maticou J_0 v $\mathbb{R}^{2n}$ bude potom zodpovedať násobeniu komplexnou jednotkou i v priestore $\mathbb{C}^n$.

TVRDENIE 4.7. *Platia nasledujúce rovnosti:*

$$Sp(2n)\cap O(2n)=Sp(2n)\cap GL(n,\mathbb{C})=O(2n)\cap GL(n,\mathbb{C})=U(n).$$

DÔKAZ. Zopakujme si definujúce rovnosti, ktoré platia pre jednotlivé vyššieuvedené grupy a predpokladajme, že $\Psi\in GL(2n)$.

$$\Psi\in GL(n,\mathbb{C})\Leftrightarrow \Psi J_0=J_0\Psi,$$
$$\Psi\in Sp(2n)\Leftrightarrow \Psi^T J_0\Psi=J_0,$$
$$\Psi\in O(2n)\Leftrightarrow \Psi^T\Psi=I.$$

Ukázať, že každé dve z rovností implikujú tretiu nechávame ako cvičenie pre čitateľa.

Pomocou cvičenia 4.3 vieme, že ak je matica $\Psi=\left(\begin{smallmatrix}A&B\\C&D\end{smallmatrix}\right)$ symplektická, potom $\Psi^{-1}=\left(\begin{smallmatrix}D^T&-B^T\\-C^T&A^T\end{smallmatrix}\right)$. Ak je matica Ψ zároveň ortogonálna, musí platiť tiež $\Psi^{-1}=\Psi^T=\left(\begin{smallmatrix}A^T&C^T\\B^T&D^T\end{smallmatrix}\right)$. Z toho plynie, že $D=A$ a $B=-C$. Matica Ψ preto bude mať tvar $\Psi=\left(\begin{smallmatrix}X&-Y\\Y&X\end{smallmatrix}\right)$, z podmienky $\Psi^T\Psi=I$ navyše dostaneme rovnosti $X^TX+Y^TY=I$ a $X^TY=Y^TX$. Opäť nechávame ako cvičenie ukázať, že presne toto je podmienka pre to, aby matica $U=X+iY$ bola unitárna. □

Cvičenie 4.8. Nech A je regulárna reálna (komplexná) matica a B je kladne definitná symetrická (hermitovská) matica spĺňajúca $B^2=AA^T$ (alebo $B^2=AA^*$).

a) Ukážte, že $B^{-1}A$ je ortogonálna (unitárna).

b) Dokážte existenciu *polárneho rozkladu*, t.j. každá regulárna matica A sa dá zapísať ako súčin $A=PU$, kde P je kladne definitná symetrická (hermitovská) a U je ortogonálna (unitárna). c) Ukážte, že polárny rozklad je jednoznačný.

Cvičenie 4.9. Majme symplektickú maticu $\Psi\in Sp(2n)$. Tá sa dá jednoznačne napísať pomocou polárneho rozkladu ako $\Psi=PU$. Ukážte, že matica $P^t=(\Psi\Psi^T)^{t/2}$ je symplektická pre každé $t\in\mathbb{R}$.

Návod: Matica $P=(\Psi\Psi^T)^{1/2}$ je symplektická, symetrická a kladne definitná, preto sa dá priestor $\mathbb{R}^{2n}$ rozložiť na priamy súčet vlastných podpriestorov V_λ, kde λ je vlastná hodnota matice P. Potom je V_λ vlastný podpriestor aj pre vlastnú hodnotu λ^t matice P^t. Ukážte, vhodným využitím ortogonality z lemy 4.6, že transformácie dané maticami P^t budú zachovávať formu ω_0.

Výsledky predošlých cvičení nám pomáhajú popísať vnorenie podgrupy $U(n)$ do $Sp(2n)$, a následne odvodiť ich ďalšie spoločné vlastnosti.

Zobrazenie $Sp(2n)\times[0,1]\to Sp(2n)$ dané predpisoom $(\Psi,t)\mapsto(\Psi\Psi^T)^{-t/2}\Psi$ bude deformačnou retrakciou z celej grupy $Sp(2n)$ na jej podgrupu $U(n)$, nakoľko $(\Psi,0)\mapsto\Psi$ a $(\Psi,1)\mapsto(\Psi\Psi^T)^{-1/2}\Psi=P^{-1}PU=U$. Matica U je ortogonálna, ale to znamená, že patrí do prieniku $Sp(2n)\cap O(2n)=U(n)$, čiže je aj unitárna.

Jedným z dôsledkov existencie deformačnej retrakcie medzi grupami $Sp(2n)$ a $U(n)$ je zhodnosť ich homotopických a homologických grúp, špeciálne ich fundamentálnych grúp.

TVRDENIE 4.10. *Fundamentálne grupy $Sp(2n)$ a $U(n)$ sú izomorfné s aditívnou grupou $\mathbb{Z}$ celých čísel, $\pi_1(Sp(2n))=\pi_1(U(n))=\mathbb{Z}$. Izomorfizmus je daný determinantom* $\det: U(n)\to S^1$.

Poznámka: Pri determinantovom zobrazení počítame s komplexnou maticou $U = X + iY$ a nie s jej reálnou reprezentáciou $\left(\begin{smallmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{smallmatrix}\right)$.

DÔKAZ. Vďaka existencii deformačnej retrakcie z $Sp(2n)$ na $U(n)$ stačí dokázať tvrdenie pre $U(n)$.

Pre symplektickú maticu $\Psi \in Sp(2n)$ môžme potom rozšíriť determinantové zobrazenie na $\rho : Sp(2n) \to S^1$ nasledovne. Retrakcia $(\Psi, 1) = (\Psi\Psi^T)^{-1/2}\Psi$ bude ležať v prieniku $Sp(2n) \cap O(2n)$, čiže $(\Psi, 1)$ reprezentuje unitárnu maticu, ktorá sa dá zapísať ako $\left(\begin{smallmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{smallmatrix}\right)$. Potom definujeme $\rho(\Psi) = \det(X + iY)$.

Fakt, že $\pi_1(U(n)) \simeq \mathbb{Z}$, pričom izomorfizmus je daný determinantovým zobrazením, plynie z nasledujúceho pozorovania. Zobrazenie $\det : U(n) \to S^1$ definuje fibráciu s fíbrom $\det^{-1}(1) = SU(n)$. Exaktná homotopická postupnosť pre fibrácie nám dáva:

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1(SU(n)) & \longrightarrow & \pi_1(U(n)) & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(S^1) & \longrightarrow & \pi_0(SU(n)) \\ \| & & & & & & \| \\ \{1\} & & & & & & \{1\} \end{array}$$

Nakoľko grupa $SU(n)$ je jednoducho súvislá, ako ukážeme nižšie, nakoniec dostaneme $\pi_1(U(n)) \simeq \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$.

Pre určenie homotopických grúp $\pi_1(SU(n))$ a $\pi_0(SU(n))$ postupujme indukciou. Grupa $SU(n)$ je zjavne jednoducho súvislá pre $n = 1$. Ak $n \geq 2$ môžeme uvažovať zobrazenie $SU(n) \to S^{2n-1}$, ktoré zobrazí reálnu reprezentáciu matice $U \in SU(n)$ na jej prvý stĺpec. Takéto zobrazenie je opäť fibráciou a jej fíber je $SU(n-1)$. Exaktná homotopická postupnosť nám opäť dá

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_2(S^{2n-1}) & \longrightarrow & \pi_1(SU(n-1)) & \longrightarrow & \pi_1(SU(n)) & \longrightarrow & \pi_1(S^{2n-1}) \\ \| & & & & & & \| \\ \{1\} & & & & & & \{1\} \end{array}$$

čo je presne indukčný krok, lebo jednoduchá súvislosť $SU(n-1)$ nám zaručí jednoduchú súvislosť $SU(n)$. □

Cvičenie 4.11. Overte platnosť predchádzajúceho tvrdenia pre matice typu 2×2 z grúp $U(1)$ a $Sp(2)$. Nájdite predpis pre determinantové zobrazenie $\rho : Sp(2) \to S^1$.

3. Maslovov index

Keďže fundamentálna grupa $Sp(2n)$ je izomorfná s aditívnou grupou celých čísel, po fixovaní orientácie vieme každej uzavretej slučke v $Sp(2n)$ reprezentujúcej prvok v $\pi_1(Sp(2n))$ priradiť jednoznačne celé číslo – jej *Maslovov index.*

Alternatívne vieme Maslovov index definovať ako priesečníkové číslo slučky v $Sp(2n)$ s tzv. Maslovovým cyklom $\overline{Sp_1}(2n)$, čo je podvarieta kodimenzie 1 v $Sp(2n)$, tvorená maticami Ψ spĺňajúcimi podmienku

$$\Psi \in Sp(2n), \quad \Psi = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right), \quad \det(B) = 0.$$

4. Podpriestory symplektického vektorového priestoru

Z toho, že symplektická forma ω je v symplektickom vektorovom priestore (V, ω) nedegenerovaná, vyplýva existencia prirodzeného zobrazenia medzi priestorom V a jeho duálom V^*. Toto duálne zobrazenie je definované ako

$$I_\omega : V \to V^* \qquad \text{kde} \quad v \mapsto \iota_v\omega = \omega(v, \cdot).$$

Zobrazenie I_ω je injektívne, ak totiž $v \mapsto 0^*$, potom z nedegenerovanosti formy ω vyplýva, že $v = 0$. Zjavne je aj lineárne, teda ide o izomorfizmus. Zobrazenie I_ω hrá významnú úlohu aj pre všeobecné symplektické variety, lebo nám dáva izomorfizmus medzi dotykovým a kodotykovým priestorom, a následne medzi vektorovými poľami a 1-formami.

Podobne ako môžeme pomocou skalárneho súčinu, t.j. symetrickej bilineárnej formy, definovať ortogonálny doplnok $W^{\perp}$ k nejakému podpriestoru $W \subset V$, môžeme zadefinovať aj jeho *symplektický ortogonálny doplnok* W^{ω} ako

$$W^{\omega} = \{v \in V \mid \omega(v, w) = 0 \text{ pre všetky } w \in W\}.$$

Platí potom nasledujúca lema.

LEMMA 4.12. *Pre ortogonálny symplektický doplnok W^{ω} v symplektickom vektorovom priestore (V, ω) platí*

$$\dim W + \dim W^{\omega} = \dim V.$$

DÔKAZ. Zobrazenie $I : V \to W^*$, dané ako zúženie zobrazenia $I_{\omega} : V \to V^*$ predpisom $I : v \mapsto \omega(v, \cdot)|_W$, je surjektívne a jadrom zobrazenia I sú práve vektory z W^{ω}. Preto dostávame

$$\dim V = \dim \mathrm{Im}(I) + \dim \mathrm{Ker}(I) = \dim W^* + \dim W^{\omega} = \dim W + \dim W^{\omega}.$$

□

Pre antisymetrickú bilineárnu formu ω vo vektorovom priestore V je geometria podpriestorov mierne komplikovanejšia ako pre symetrickú formu, t.j. štandarný skalárny súčin. Podpriestor a jeho symplektický ortogonálny doplnok sa totiž môžu netriválne pretínať, tým pádom rozlišujeme viacero špeciálnych prípadov. Hovoríme, že vektorový podpriestor $W \subset V$, $\dim V = 2n$ je

symplektický, ak $\omega|_W$ je nedegenerovaná,
izotropický, ak $W \subset W^{\omega}$,
koizotropický, ak $W \supset W^{\omega}$,
lagrangeovský, ak $W = W^{\omega}$.

Pre lagrangeovský podpriestor teda platí $\omega|_W \equiv 0$, a tiež nutne $\dim W = n$.

Cvičenie 4.13. Ukážte, že podpriestor $W \subset V$ je symplektický práve vtedy ak $W \cap W^{\omega} = \{0\}$, čo je to isté ako $V = W \oplus W^{\omega}$.

Príklad 4.14. Pre symplektický vektorový priestor $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ so štandardnou symplektickou bázou $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ je lineárny priestor $L = \mathrm{span}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ lagrangeovský. Ako uvidíme o chvíľu, lagrangeovských podpriestorov je v $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ ďaleko viac a tvoria takzvaný *lagrangeovský grassmanián.*

TVRDENIE 4.15. *Nech $\Lambda = Im\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)$, kde X a Y sú bloky veľkosti $n \times n$. Potom Λ je lagrangeovským podpriestorom v $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ práve vtedy, ak $X^T Y = Y^T X$ a* $\dim \mathrm{Im}\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right) = n$.

DÔKAZ. Nech $z = \left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right) u$ a $z' = \left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right) u'$. Potom

$$\omega_0(z, z') = u^T \left(X^T, Y^T\right) J_0^T \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} u' =$$

$$= u^T \left(-Y^T, X^T\right) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} u' = u^T(-Y^T X + X^T Y) u',$$

z čoho už dostávame naše tvrdenie. □

Poznámka. V špeciálnom prípade, pre za maticu X zvolíme identickú maticu $\mathbb{1}_n$, bude graf $\Lambda = \{(x, Ax) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ matice A lagrangeovským podpriestorom práve vtedy, ak A bude symetrická matica.

Na to, aby sme mohli klasifikovať všetky lagrangeovské podpriestory v symplektickom vektorovom priestore $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, musíme ešte zistiť za akých podmienok môžeme dostať popis toho istého podpriestoru Λ dvoma rôznymi spôsobmi, t.j. kedy $Im\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right) = Im\left(\begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix}\right)$.

Pripomeňme si, že podmienku $X^TY = Y^TX$ sme už videli v súvislosti s unitárnymi maticami. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že stĺpce matice $\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)$ budú reprezentovať ortogonálnu bázu v Λ.

Potom

$$\left(X^T, Y^T\right)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \mathbb{1}_n,$$

$$X^TX + Y^TY = \mathbb{1}_n,$$

čiže naozaj X a Y reprezentujú unitárnu maticu $X + iY$ v $U(n)$. Keďže každú ortonormálnu bázu v Λ vieme dostať z jednej fixnej akciou grupy $O(n)$, dostávame, že lagrangeovský grassmanián bude presne $\mathcal{L}(n) = U(n)/O(n)$.

Cvičenia

Cvičenie 4.16. Ukážte, že charakteristický polynóm antisymetrickej matice je párna funkcia, ak má matica párny počet riadkov a je nepárna funkcia, ak má matica nepárny počet riadkov.

Cvičenie 4.17. Nech $A = -A^T$ je nedegenerovaná antisymetrická matica typu $2n \times 2n$. Definujme formu ω ako $\omega(z, w) = \langle Az, w\rangle$. Ukážte, že symplektická báza pre priestor $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ sa dá sknštruovať pomocou vlastných vektorov $u_j + \mathrm{i}v_j$ matice A.

Pomôcka: využite fakt, že matica iA je samoadjungovaná, a preto sa dá diagonalizovať.

Cvičenie 4.18. Ukážte, že ak symplektická matica $\Psi \in Sp(2n)$ je diagonalizovateľná, potom sa dá diagonailizovať symplektickými maticami.

Cvičenie 4.19. Nech A a B sú reálne matice typu $n \times n$. Ukážte, že platí

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |\det(A + \mathrm{i}B)|^2.$$

Cvičenie 4.20. Nech (V, ω) je symplektický vektorový priestor a $W \subset V$ ľubovoľný podpriestor. Ukážte, že faktorizovaný priestor $V' = W/(W \cap W^\omega)$ má prirodzenú symplektickú štruktúru.

Cvičenie 4.21. Nech β je ľubovoľná, nie nutne nedegenerovaná, bilineárna forma na vektorovom priestore W. Ukážte, že potom existuje báza $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_p$ priestoru W taká, že $\beta(u_j, v_k) = \delta_{jk}$ a pre všetky ostatné páry bude $\beta(b_1, b_2)$ nulové. Báza s takouto vlastnosťou sa nazýva štandardnou bázou pre (W, β) a číslo $2n$ sa nazýva *hodnosť* formy β.

Cvičenie 4.22. Ukážte, že ak W je izotropický, koizotropický alebo symplektický podpriestor v (V, ω), potom sa dá každá štandardná báza priestoru (W, ω) doplniť na symplektickú bázu priestoru (V, ω).

Cvičenie 4.23. Ukážte, že pre ľubovoľnú hyperrovinu W v $2n$-rozmernom symplektickom priestore (V, ω) platí $W^\omega \subset W$, a teda forma $\omega|_W$ má hodnosť $2(n-1)$.

Pomôcka: Na základe jedného z predošlých cvičení vieme, že $\omega|_W$ má párnu hodnosť, teda existuje nenulový vektor $w \in W$, pre ktorý $\omega(w, v) = 0$ pre všetky $v \in w$. Ukážte, že w generuje W^ω.

Cvičenie 4.24. Nech $\Omega(V)$ označuje priestor všetkých symplektických foriem vo vektorovom priestore V. Uvažujúc akciu grupy $GL(2n, \mathbb{R})$ na $\Omega(V)$ danú predpisom

$$\omega \mapsto \Psi^*\omega,$$

ukážte, že $\Omega(V) \simeq GL(2n,\mathbb{R})/Sp(2n)$.

Cvičenie 4.25. Ukážte, že ortogonálny doplnok k lagrangeovskému podpriestoru $\Lambda \subset \mathbb{R}^{2n}$ vzhľadom na štandardný skalárny súčin je daný ako $\Lambda^\perp = J_0\Lambda$. Odvoďte z toho, že ak $u_1, \ldots, u_n$ je ortonormálna báza priestoru Λ, potom vektory $u_1, \ldots, u_n$, $J_0u_1, \ldots, J_0u_n$ tvoria bázu $\mathbb{R}^{2n}$, ktorá je zároveň symplektická aj ortogonálna.

Cvičenie 4.26. Uvažujme zvislý lagrangián

$$\Lambda_{\mathrm{vert}} = \left\{ z = (x,y) \in \mathbb{R}^{2n} | x = 0 \right\}.$$

Použite Lemmu 4.15 na to, aby ste ukázali, že lagrangeovský grassmanián $\mathcal{L}(n)$ sa dá popísať ako disjunktné zjednotenie

$$\mathcal{L}(n) = \mathcal{L}_0(n) \cup \Sigma(n),$$

kde $\mathcal{L}_0(n)$ je totožné s afinným priestorom symetrických matíc typu $n \times n$ a $\Sigma(n)$ pozostáva zo všetkých lagrangeovských podpriestorov v $\mathbb{R}^{2n}$, ktoré sa nepretínajú s Λ_{vert} tranzverzálne. V takejto reprezentácii $\Sigma(n)$ predstavuje Maslovov cyklus (pozri podkapitolu 3).

PREDNÁŠKA 5

Diferenciálne formy 2: integrovanie, Stokesova veta, kohomológie (PŠ)

1. Integrovanie: Definícia

Diferenciálne formy boli vymyslené nato, aby boli integrované. Myšlienka je jednoduchá: ak je α diferenciálna k-forma na variete M a $N \subset M$ je orientovaná podvarieta, rozdelíme N na maličké k-rozmerné rovnobežnosteny. Pre každý rovnobežnosten spočítame $\alpha(v_1, \dots, v_k)$, kde $v_1 \dots v_k$ sú vektory ktoré ho vytvárajú, a napokon sčítame cez všetky rovnobežnosteny. Výsledok označíme

$$\int_N \alpha.$$

Antisymetria α je nám zaručí, že výsledok nezávisí od použitého rozdelenia (viď prednášku Diferenciálne formy 1: motiváciou pre antisymetriu bola práve táto vlastnosť). Všimnime si, že ak zmeníme orientáciu N, integrál zmení znamienko.

Predchádzajúca definícia bola pravdaže naivná. Skutočná definícia je ale podobná. Pullbackneme (čiže zúžime) α na N. Potom pokryjeme N otvorenými množinami U_i, z ktorých každá je pokrytá lokálnymi súradnicami, zvolíme rozdelenie jednotky (t.j. hladké funkcie ϕ_i na N také, že $0 \leq \phi_i \leq 1$, $\sum_i \phi_i = 1$ a $\operatorname{supp} \phi_i \subset U_i$) a definujeme

$$\int_N \phi_i \alpha = \int_{U_i} \phi_i \alpha$$

ako integrál v lokálnych súradniciach na U_i

$$\int (\phi_i \alpha)_{12\dots n} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

kde

$$\phi_i \alpha = (\phi_i \alpha)_{12\dots n} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$$

je vyjadrenie $\phi_i \alpha$ v lokálnych súradniciach. Napokon definujeme

$$\int_N \alpha = \sum_i \int_{U_i} \phi_i \alpha.$$

Nezávislosť od výberu lokálnych súradníc plynie z vety o substitúcii, a nezávislosť od voľby ϕ_i sa ľahko nahliadne.

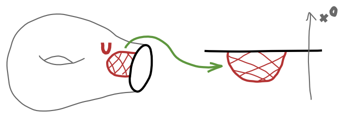
2. Stokesova veta

Stokesova veta hovorí toto: ak je α diferenciálna k-forma na variete M a $N \subset M$ je $k+1$-rozmerná orientovaná podvarieta s hranicou ∂N, tak

$$\int_N d\alpha = \int_{\partial N} \alpha$$

(∂N zdedí orientáciu z N; treba zabezpečiť, aby boli integrály definované - napr. predpokladom že α zúžené na N má kompaktný nosič).

Dôkaz Stokesovej vety plynie hneď z definície integrálu. Lokálna mapa (t.j. lokálne súradnice) nám identifikujú otvorenú podmnožinu $U \subset M$ s otvorenou podmnožinou v "dolnom podpriestore", t.j. v podmnožine $\mathbb{R}^{k+1}$ zadanej rovnicou $x^0 \leq 0$.



Použijeme rozklad jednotky, aby sme mohli predpokladať, že $\operatorname{supp} \alpha \subset U$ (t.j. vynásobíme α príslušným ϕ_i). No a napokon spočítame integrál cez U tak, že najprv preintegrujeme cez x^0 - a Stokesova veta vylezie zo vzťahu

$$\int_{-\infty}^{0} f'(x)\, dx = f(0).$$

Stokesova veta je teda dôsledkom Newtonovho-Leibnizovho vzťahu, a zároveň je jeho viacrozmerným zovšeobecnením.

3. Uzavreté a exaktné formy

Pripomeňme z prednášky Diferenciálne formy 1, že pre každú diferenciálnu formu platí $dd\alpha = 0$. Formy, ktoré spĺňajú $d\alpha = 0$ sa nazývajú *uzavreté*, formy ktoré sa dajú vyjadriť ako $d\beta$ sú zasa *exaktné*; každá exaktná forma je teda uzavretou. Často býva dôležité zistiť, či je zadaná uzavretá forma aj exaktnou (vo fyzike to zodpovedá otázke, či existuje potenciál). Ako uvidíme, na $\mathbb{R}^n$ to je pravda vždy, na iných varietach to však tak byť nemusí.

Predstavme si, že na variete M máme *uzavretú* k-formu α (t.j. $d\alpha = 0$), a že $K \subset M$ je uzavretá podvarieta. Ak náhodou

$$\int_K \alpha \neq 0,$$

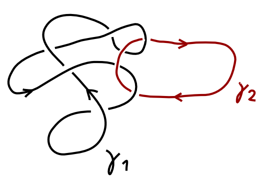
tak Stokesova veta nám povie, že α nie je exaktná, a zároveň, že K nie je hranicou $k+1$-rozmernej podvariety M.

Ako najjednoduchší príklad nech je M kompaktná varieta a α objemová forma na M (t.j. α je forma najvyššieho stupňa, ktorá nie je nikde nulová). M získa od α orientáciu, a

$$\int_M \alpha > 0.$$

Forma α teda *nie je exaktná*, hoci je určite uzavretá (keďže je najvyššieho stupňa). Ak je (M, ω) kompaktná $2n$-rozmerná symplektická varieta, tak ω^n je objemová forma, ktorá teda nie je exaktná. Tým pádom ani ω nie je exaktná (naozaj: ak by bolo $\omega = d\beta$, tak potom $\omega^n = d(\beta \wedge \omega^{n-1})$). *Na kompaktej variete teda symplektická forma nemôže byť exaktná.*

Ukážme si ešte jeden príklad ktorý sa týka zauzlenia kriviek v priestore a pochádza z magnetostatiky.



Nech γ_1 je uzavretá krivka v $\mathbb{R}^3$ a nech B je 1-forma na $\mathbb{R}^3 - \gamma_1$, zadaná formulou

$$B_x(v) = \int_{\gamma_1} \frac{((x-y) \times v) \cdot dy}{|x-y|^3}$$

B je (až na násobok) magnetické pole, vyvolané v priestore elektrickým prúdom v drôte γ_1; tá hrozná formula je Biotov-Savartov zákon. Geometrický význam B je tiež zaujímavý. Ak je γ ľubovoľná krivka, tak $\int_\gamma B$ je celkový priestorový uhol (t.j. plocha na jednotkovej sfére, v ktorej strede stojíme), ktorý zametie krivka γ_1, keď sa na ňu pozeráme počas našej jazdy pozdĺž krivky γ.

Z oboch popisov plynie, že B je uzavretá (prečo?). Nie je ale exaktná: ak je γ_2 uzavretá krivka, tak $\int_{\gamma_2} B$ sa rovná celkovému prúdu, ktorý preteká cez ľubovoľnú plochu Σ, ktorej hranicou je γ_2. Treba teda zistiť, koľko krát sa pretínajú γ_1 a Σ (spolu s orientáciami). Toto číslo môže byť nenulové (aké je pre krivky na obrázku?); zadáva, koľko krát sa krivky γ_1 a γ_2 okolo seba obtočia.

4. De Rhamove kohomológie - definícia

Videli sme, že hoci každá exaktná forma je uzavretou, naopak to nemusí byť pravda. Povieme, že dve uzavreté formy ležia v tej istej *kohomologickej triede*, ak sa líšia o exaktnú formu; triedu formy α označíme $[\alpha]$. Kohomologické triedy sa dajú sčitovať, násobiť číslami, a aj násobiť medzi sebou; všetky tieto operácie zdedia z diferenciálnych foriem (napr. $[\alpha] \wedge [\beta] := [\alpha \wedge \beta]$; rozmyslite si, že týmto je súčin dobre definovaný). Ak máme hladké zobrazenie $f : M \to N$ a kohomologickú triedu $[\alpha]$ na N, tak definujeme *pullback* $[\alpha]$ ako $f^*[\alpha] := [f^*\alpha]$.

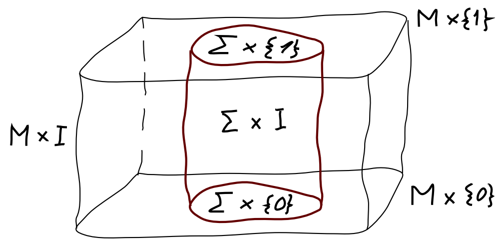
Vektorový priestor kohomologických tried na variete M (t.j. faktorpriestor *uzavreté formy / exaktné formy*) sa nazýva *de Rhamova kohomológia* M a označuje sa $H^*_{dR}(M)$; $H^*_{dR}(M) = \sum_{i\geq 0} H^i_{dR}(M)$, kde $H^i_{dR}(M)$ je priestor tried uzavretých i-foriem (nazýva sa *i-ta kohomológia* M).

5. Homotopie a De Rhamove kohomológie

Dokážeme si nasledujúce jednoduché, ale dôležité tvrdenie:

Ak sa dajú dve uzavreté formy $\alpha_0, \alpha_1 \in \Omega(M)$ prepojiť uzavretou formou α na $M \times I$ (t.j. takou, že $\alpha_0 \in \Omega(M)$ je zúženie α na $M \times \{0\} \subset M \times I$ a podobne pre α_1), tak potom $[\alpha_0] = [\alpha_1]$. (Tvrdenie platí aj naopak: ak $\alpha_1 = \alpha_0 + d\beta$, môžeme použiť $\alpha = \alpha_0 + d(t\beta)$).

Diferenciálnu formu $\beta \in \Omega(M)$ takú, že $\alpha_1 - \alpha_0 = d\beta$, nájdeme pomocou obrázku:



Naozaj:

$$0 = \int_{\Sigma\times I} d\alpha = \int_{\partial(\Sigma\times I)} \alpha = \int_\Sigma (\alpha_1 - \alpha_0) + \int_{\partial\Sigma\times I} \alpha$$

(v druhej rovnosti sme použili rozklad hranice valca $\Sigma \times I$ na dve podstavy a plášť). Ak teda definujeme formu $\beta \in \Omega(M)$ ako mínus integrál α cez I, t.j. tak, aby pre každé $\gamma \subset M$ bolo

$$\int_\gamma \beta = -\int_{\gamma\times I} \alpha,$$

tak bude

$$\int_\Sigma (\alpha_1 - \alpha_0) = \int_{\partial\Sigma} \beta,$$

a teda $\alpha_1 - \alpha_0 = d\beta$.

Majme teraz dve variety M a N a dve hladké zobrazenia $f_{1,2} : M \to N$, ktoré sa dajú deformovať jedno na druhé, t.j. sú prepojené hladkým zobrazením $f : M \times I \to N$. Pre každú kohomologickú triedu $[\omega]$ na N je $f_1^*[\omega] = f_2^*[\omega]$. Naozaj, stačí položiť v tvrdení, ktoré sme dokázali, $\alpha = f^*\omega$.

6. Prípad stiahnuteľnej variety

Ak je varieta M stiahnuteľná, potom je každá uzavretá forma na nej exaktná (okrem 0-foriem, t.j. funkcií). Inými slovami,

$$H^k_{dR}(M) = \begin{cases} 0 & (k > 0) \\ \mathbb{R} & (k = 0) \end{cases}$$

Stiahnuteľnosť znamená, že sa dá identické zobrazenie $M \to M$ zdeformovať na konštantné, t.j. existuje zobrazenie $f : M \times I \to M$ a bod $x_0 \in M$ také, že $f_0(x) := f(x, 0) = x$ a $f_1(x) := f(x, 1) = x_0$ pre všetky $x \in M$. Najjednoduchší príklad stiahnuteľného M je $\mathbb{R}^n$, kde môžeme použiť $f(x, t) = tx$.

Naozaj: pre každú uzavretú k-formu ω na M je $f_0^*\omega = \omega$ a (pre $k > 0$) $f_1^*\omega = 0$, čiže $[\omega] = 0$. To je všetko.

Čo sa dá robiť v prípade nestiahnuteľných variet? Predstavme si, že varietu M pokryjeme dostatočne malými otvorenými podmnožinami U_i, tak, aby každé U_i bolo stiahnuteľné, a aby aj prienik ľubovoľného počtu U_i-čok bol stiahnuteľný alebo prázdny. Ak je α uzavretá k-forma na M, tak je na každom U_i exaktná, t.j. nájdeme $k-1$-formu β_i na U_i tak, že $d\beta_i = \alpha$. Na prieniku $U_i \cap U_j$ nemusí byť $\beta_i = \beta_j$, ale $d\beta_i = d\beta_j$, t.j. $\beta_i - \beta_j = d\gamma_{ij}$ pre vhodnú $k-2$-formu γ_{ij} na $U_i \cap U_j$. Keď budeme takto postupovať ďalej, napokon skončíme s konštantami (t.j. konštantnými funkciami) na $k+1$-násobných prienikoch U_i-čok. Týmto spôsobom sa dá previesť problém výpočtu $H^*_{dR}(M)$ na kombinatorický problém, a aj dokázať, že $H^*_{dR}(M) = H^*(M, \mathbb{R})$; to je ale za hranicami tejto prednášky.

7. Sféra a stredovanie

Skúsme teraz spočítať $H^*_{dR}(S^n)$, kde S^n označuje n-rozmernú sféru. Ak je α uzavretá forma na S^n a $g : S^n \to S^n$ ľubovoľné otočenie, tak $[g^*\alpha] = [\alpha]$; to preto, lebo g je homotopické s identitou (dá sa dosiahnuť pohybom). Ak by sme mali viac otočení g_i, $1 \le i \le m$, tak potom aj

$$\left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m g_i^*\alpha\right] = [\alpha].$$

Ak vystredujeme α cez všetky otočenia (musíme prejsť od sumy k integrálu, konkrétne

$$\langle\alpha\rangle := \int_{SO(n+1)} g^*\alpha \, dg,$$

kde invariantná hustota dg je normalizovaná tak, aby $\int_{SO(n+1)} dg = 1$), tak bude naďalej

$$[\langle\alpha\rangle] = [\alpha]\,.$$

To znamená, že v každej kohomologickej triede je forma, ktorá je invariantná voči všetkým rotáciám - konkrétne $\langle\alpha\rangle$.

Ako vyzerajú rotačne invariantné formy na S^n? Takú formu α stačí poznať v jednom bode $P \in S^n$, do ostatných sa prinesie otočeniami. Nech je $e_1, \dots, e_n$ ortonormálna báza $T_P^*S^n$, a pozrime sa na otočenie g o 90° $e_1 \mapsto e_2$, $e_2 \mapsto -e_1$, $e_i \mapsto e_i$ $(i \ge 2)$. Napíšeme α v báze súčinov e_i-čok; ak sa v tomto zápise vyskytuje člen povedzme $c\,e_1 \wedge e_3 \wedge e_4$, tak otočenie g dáva člen $c\,e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$, a ešte raz opakované otočenie g dáva $-c\,e_1 \wedge e_3 \wedge e_4$, čiže $c = 0$. Takýto člen sa teda v α

nevyskytuje; buď sú e_1 a e_2 spolu, alebo ani jedno. Namiesto 1 a 2 si ale môžeme zvoliť ľubovoľnú dvojicu indexov, a prídeme k tomu, že buď sú tam zároveň všetky e_i (t.j. máme násobok $e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$) alebo ani jedno.

Jediné invariantné formy na S^n sú teda konštanty a konštantné násobky objemovej formy. Obe sú uzavreté a nie sú exaktné (konštanty očividne, a objemová forma preto, lebo má nenulový integrál), čiže

$$H^k_{dR}(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & (k = 0, n) \\ 0 & (\text{inak}) \end{cases} .$$

Okrem $n = 2$ je teda $H^2_{dR}(S^n) = 0$ a S^n preto nemôže byť symplektickou varietou.

PREDNÁŠKA 6

Hamiltonovská mechanika 2 (MF)

- Algebra pozorovateľných (dva kompatibilné súčiny)
- Poincarého-Cartanove integrálne invarianty a Liouvillova veta
- Hamiltonián závislý od času
- Forma $pdq - Hdt$, variačný princíp pre Hamiltonove rovnice

Algebra pozorovateľných. Prítomnosť Poissonovej zátvorky obohacuje (*asociatívnu*) algebru funkcií $\mathcal{F}(M)$ na symplektickej variete o dodatočnú štruktúru *Lieovej* algebry, takže vzniká kombinovaná *algebra pozorovateľných* klasickej mechaniky $\mathcal{A}(M)$ (varieta M hrá v klasickej mechanike úlohu *fázového priestoru*). Jej prvky, *pozorovateľné*, sú funkcie $f \in \mathcal{F}(M)$ na fázovom priestore; dajú sa robiť ich lineárne kombinácie a pobodové súčiny ($\Rightarrow$ zatiaľ asociatívna algebra), ale aj ich Poissonove zátvorky ($\Rightarrow$ Lieova algebra).

Názov "pozorovateľná" pre funkcie na fázovom priestore zodpovedá predstave, že to sú (v klasickej mechanike) práve objekty teórie, ktorým zodpovedajú merateľné veličiny a ktoré sa dajú porovnávať s výsledkom merania. Merania sa konajú na "stavoch", ktorým v teórii zodpovedajú *body* fázového priestoru M. Výsledkom merania pozorovateľnej f v stave $p \in M$ je *hodnota* f v bode p, teda *číslo* $f(p)$.

Dva "súčiny" $\mathcal{A}(M) \times \mathcal{A}(M) \to \mathcal{A}(M)$ sú navzájom prepojené identitou

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$$

ktorá jednoducho odráža fakt, že za Poissonovou zátvorke je vektorové pole, $\{f, \, . \,\} = \zeta_f(\, . \,)$, t.j. *derivácia* (asociatívnej) algebry $\mathcal{F}(M)$.

Keďže prvky algebry $\mathcal{A}(M)$ (pozorovateľné) sú *funkcie* na fázovom priestore M, prirodzene na nej pôsobia difeomorfizmy ($f \mapsto \Phi^* f$). Štruktúru tejto algebry zachovávajú práve *symplektomorfizmy* (M, ω), t.j. také difeomorfizmy M na seba, ktoré zachovávajú symplektickú formu ω

$$\Phi^* \omega = \omega$$

Hamiltonovské polia generujú *toky* takýchto transformácií. Pôsobenie tokov hamiltonovských polí na algebre $\mathcal{A}(M)$

$$U_t^f : \mathcal{A}(M) \to \mathcal{A}(M) \qquad\qquad U_t^f := (\Phi_t^f)^* \qquad \Phi_t^f \leftrightarrow \zeta_f, \; f \in \mathcal{A}(M)$$

sa dá vyjadriť aj v tvare radu

$$U_t^f g = g + t\{f, g\} + \frac{t^2}{2!}\{f, \{f, g\}\} + \frac{t^3}{3!}\{f, \{f, \{f, g\}\}\} + \dots$$

Pritom *Jacobiho identita* pre Poissonovu zátvorku je vlastne infinitezimálnou verziou podmienky *zachovania* Poissonovej zátvorky (ľubovoľných dvoch funkcií) voči toku ľubovoľného hamiltonovského poľa, t.j. podmienky

$$U_t^f \{g, h\} = \{U_t^f g, U_t^f h\} \qquad\qquad f, g, h \in \mathcal{A}(M)$$

Zobrazenie

$$U_t^f : \mathcal{A}(M) \to \mathcal{A}(M)$$

je pre každé t *automorfizmom* algebry pozorovateľných $\mathcal{A}(M)$ (zachováva jej lineárnu štruktúru aj *oba súčiny*) a predpis $t \mapsto U_t^f$ je jednoparametrickou grupou takýchto automorfizmov.

Poincarého-Cartanove invarianty, Liouvillova veta. Geometrická formulácia Hamiltonových rovníc

$$\dot{\gamma} = \zeta_H \qquad i_{\zeta_H}\omega = -dH \tag{33}$$

sa umožňuje elegantne vysporiadať s niektorými otázkami, ktoré sú bez nej technicky podstatne komplikovanejšie. Napríklad s Poincarého-Cartanovými integrálnymi invariantami. Tvrdenie spočíva v tom, že integrál k-násobného súčinu symplektickej formy (čo je $2k$-forma) po ľubovoľnej $2k$-rozmernej oblasti sa nemení, keď túto oblasť posúvame po variete hamiltonovským tokom generovaným ľubovoľnou funkciou.

$$\int_{\Phi_t(\mathcal{D})} \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{k \text{ kusov}} = \int_{\mathcal{D}} \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{k \text{ kusov}} \qquad\qquad \Phi_t \ \leftrightarrow \ \zeta_f$$

(Špeciálne ak za túto funkciu vyberieme hamiltonián, dostávame invariantnosť voči *časovému* vývoju.)

▼ Dôkaz je pomocou foriem (na rozdiel od súradnicového jazyka) až smiešne jednoduchý:

$$\int_{\Phi_t(\mathcal{D})} \omega \wedge \cdots \wedge \omega = \int_{\mathcal{D}} \Phi_t^*(\omega \wedge \cdots \wedge \omega) = \int_{\mathcal{D}} \Phi_t^*\omega \wedge \cdots \wedge \Phi_t^*\omega = \int_{\mathcal{D}} \omega \wedge \cdots \wedge \omega$$

▲

Najdôležitejší a najznámejší je posledný z týchto integrálnych invariantov, t.j. prípad $k = n$. Príslušné tvrdenie je známe ako *Liouvillova veta*. Hovorí, že pri fázovom toku sa zachováva (kanonický) *fázový objem*. Výpočet ukazuje, že integrál z n-násobného súčinu symplektickej formy sa v kanonických súradniciach vyjadruje výrazom bežným v štatistickej fyzike, t.j. (až na normovací faktor) ako $\int_{\mathcal{D}} dpdq$.

Hamiltonián závislý od času. Zatiaľ sme predpokladali, že hamiltonián (generátor dynamického poľa) nezávisí od času. Bola to funkcia na *symplektickej* variete, takže v kanonických súradniciach funkcia premenných (q, p) (a nijakého ďalšieho t). Z mechaniky však vieme, že v Hamiltonových (alebo Lagrangeových) rovniciach sa apriori *nepredpokladá*, že hamiltonián (lagranžián) nezávisí od času; všeobecne sa Hamiltonove rovnice (13) chápu tak, že $H = H(q, p, t)$ a podobne aj v Lagrangeových rovniciach sa pripúšťa $L(q, \dot{q}, t)$. Ako zahrnúť do našich geometrických úvah túto možnosť?

Potrebujeme v prvom rade povedať, na *akej variete* bude vlastne definovaný hamiltonián, ak jeho súradnicové vyjadrenie má byť $H(q, p, t)$. Jedno prirodzené riešenie je pridať k pôvodnej symplektickej variete dodatočnú časovú os (prejsť k *rozšírenému* fázovému priestoru), čiže prejsť od symplektickej variety M k variete $M \times \mathbb{R}$.

Teraz sa dá postupovať takto. Prepíšeme Hamiltonove rovnice (13) do tvaru

$$dq^a - \frac{\partial H}{\partial p_a}\, dt = 0 \qquad dp_a + \frac{\partial H}{\partial q^a}\, dt = 0 \qquad\qquad a = 1, \dots n \tag{34}$$

Názorne pochopiteľná (a na prednáške z analýzy zakazovaná) interpretácia týchto rovníc je taká, že vyjadrujú vzťah medzi *infinitezimálnymi prírastkami* súradníc dq^a, dp_a a času *dt na riešeniach* pohybových rovníc (13). No dá sa na ne pozerať ajináč - cez diferenciálne formy a distribúcie (tento pohľad je už nezakázateľný). Konkrétne, na variete, kde sa používajú súradnice q^a, p_a a t, t.j. akurát na našom rozšírenom fázovom priestore $M \times \mathbb{R}$, uvažujeme $2n$ diferenciálnych 1-foriem

$$\alpha^a := dq^a - \frac{\partial H}{\partial p_a}\, dt \qquad \beta_a := dp_a + \frac{\partial H}{\partial q^a}\, dt$$

Podmienku (34) potom treba chápať tak, že dotykový vektor $\dot\gamma$ ku krivke $t \mapsto \gamma(t) \leftrightarrow (q^a(t), p_a(t), t)$ v rozšírenom fázovom priestore $M \times \mathbb{R}$ *vynuluje každú* z $2n$ 1-foriem α^a, β_a

$$i_{\dot\gamma}\alpha^a = 0 \qquad i_{\dot\gamma}\beta_a = 0$$

1-formy α^a a β_a sa teda použijú ako ohraničujúce formy istej distribúcie. Keďže sú *lineárne nezávislé*, je ich $2n$ a sme na $2n+1$ rozmernej variete, distribúcia je 1-rozmerná.

▼ Ak sme na variete $N \times \mathbb{R}$ so súradnicami $(x^1, \dots, x^n, t)$, tak ľubovoľná p-forma má tvar $dt \wedge a + b$, kde formy a, b už neobsahujú dt. Uvažujem 1-formy $\sigma^i = dx^i + f^i(x,t)dt$, $i = 1, \dots, n$. Ich súčin $\sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^n$ je nejaká n-forma. Má teda určite tvar $dt \wedge \hat a + \hat b$. Veľmi ľahko sa zistí to $\hat b$ - vzniká totiž tak, že pri roznásobovaní zoberiem z každého σ^i člen dx^i - dostávam tak $\hat b = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Táto n-forma je nenulová a lineárne nezávislá na druhom člene vo všeobecnom rozklade, takže súčin $\sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^n$ je *nenulový*. To ale znamená, že 1-formy σ^i sú lineárne *nezávislé*. ▲

V každom bode rozšíreného fázového priestoru tak existuje významný smer (1-rozmerný podpriestor v dotykovom priestore). Z konštrukcie tých 1-foriem vyplýva, že ísť týmto smerom znamená vyvíjať sa podľa Hamiltonových rovníc. Znamená to, že študovať riešenia Hamiltonových rovníc je vlastne „to isté" ako študovať distribúciu danú 1-formami α^a a β_a.

Teraz si uvedomíme, že vynulovať *každú* z 1-foriem α^a a β_a *zvlášť* a vynulovať *jednu jedinú* 2-formu $\beta_a \wedge \alpha^a$ je to isté:

$$i_W(\beta_a \wedge \alpha^a) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad i_W\beta_a = 0 = i_W\alpha^a\ ,\ a = 1, \dots, n$$

To ale znamená, že *celá informácia* o uvažovanej distribúcii je kompaktne uložená aj v tej jedinej 2-forme $\beta_a \wedge \alpha^a$. No a ako tá úžasná 2-forma, na ktorej pleciach spočíva celá distribúcia, vlastne vyzerá? Takto:

$$\begin{aligned}\beta_a \wedge \alpha^a &= dp_a \wedge dq^a - dH \wedge dt \\ &= d(p_a dq^a - H dt) \equiv d(pdq - Hdt)\end{aligned}$$

Vidíme teda, že zo súčiastok, ktoré vzniknú prirodzene pri odbornej demontáži Hamiltonových rovníc sa dá jednoducho poskladať *exaktná 2-forma* $d(pdq - Hdt)$, ktorá hrá kľúčovú úlohu pre Hamiltonove rovnice. Ich geometrický zápis pomocou nej vyzerá

$$i_{\dot\gamma}(dp_a \wedge dq^a - dH \wedge dt) \ \equiv\ i_{\dot\gamma} d(pdq - Hdt) \ =\ 0 \tag{35}$$

Ak hamiltonián nezávisí explicitne od času, dá sa z tejto rovnice (pre krivku $t \mapsto \gamma(t) \leftrightarrow (q(t), p(t), t)$ na $M \times \mathbb{R}$) získať vyjadrenie (33) (kde to ale je pre krivku $t \mapsto \gamma(t) \leftrightarrow (q(t), p(t))$ už len na M).

Variačný princíp. Stručne spomenieme argument, z ktorého sa prakticky bez výpočtov dá nahliadnuť, že krivka, ktorá je riešením rovnice (35), zároveň extremalizuje účinok

$$S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} (pdq - Hdt) \equiv \int_{t_1}^{t_2} \sigma$$

Nech $\gamma(t)$ je riešením rovnice (35) na intervale medzi t_1 a t_2. Vykonáme jej drobnú variáciu, $\gamma(t) \mapsto \gamma_\epsilon(t)$, ktorá nechá (zatiaľ) konce na mieste. Tým dostaneme dvojrozmerný úzky pásik Σ ohraničený pôvodnou a novou krivkou: $\partial\Sigma = \gamma - \gamma_\epsilon$. Uvažujme integrál 2-formy $d\sigma$ po tomto pásiku, $\int_\Sigma d\sigma$. Tento integrál sa podľa Stokesovej vety rovná rozdielu účinku po pôvodnej a varírovanej krivke, čiže práve variácii účinku (so znamienkom mínus). Zároveň je však (do prvého rádu) nulový: keď ho budeme v procese integrovania sekať na kúsky, tieto kúsky sa dajú natiahnúť na dvojicu vektorov $\dot\gamma$ (v smere pásika) a W (pole, ktorým sa realizuje variácia). Príspevok za taký kúsok ale je $d\sigma(\dot\gamma, W) = (i_{\dot\gamma} d\sigma)(W) = 0$, keďže podľa (35) je $i_{\dot\gamma} d\sigma = 0$. Argument prejde aj pre variácie, ktoré koncami krivky hýbu, ale len tak, aby sme neprispeli do integrálu po hranici. Zo štruktúry formy σ (z člena $p_a dq^a$) vidno, že nemáme varírovať q^a, ale pokojne môžeme zmeniť p_a.

PREDNÁŠKA 7

Lagrangeove podvariety (PŠ)

1. Nič než definície

V symplektickom vektorovom priestore (V, ω) sa dá ω používať ako "skalárny súčin". Napríklad sa dá použiť na definíciu ortogonálneho doplnku: ak je $U \subset V$ vektorový podpriestor, $U^\perp = \{v \in V;\ (\forall u \in U)\, \omega(u, v) = 0\}$; z nedegenerovanosti ω plynie, že

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V. \tag{36}$$

Antisymetria ω má za následok napríklad to, že každý vektor je kolmý sám na seba.

Ak je $\omega|_U = 0$, čiže $U \subset U^\perp$, podpriestor $U \subset V$ sa nazýva *izotropný*. Ak je naopak $U \supset U^\perp$, tak U je *koizotropný*. Všimnime si (z rovnice (36)), že izotropné priestory spĺňajú $\dim U \leq \dim V/2$, koizotropné $\dim U \geq \dim V/2$, a ak nastane rovnosť, tak v oboch prípadoch $U = U^\perp$, a U je teda zároveň izotropný aj koizotropný.

Práve tento posledný prípad je najzaujímavejší. Ak $U = U^\perp$, podpriestor U je *Lagrageov*. Najjednoduchší spôsob ako zistiť, že $U \subset V$ je Lagrangeov, je zvyčajne skontrolovať, že $\omega|_U = 0$ a $\dim U = \dim V/2$.

Prejdime teraz z lineárnej algebry na variety. Podvarieta N symplektickej variety (M, ω) je *Lagrangeova*, ak pre každý bod $x \in N$ je $T_x N \subset T_x M$ Lagrangeov podpriestor (a podobne pre izotropné a koizotropné podvariety). Podvarieta N je teda Lagrangeova, ak $\omega|_N = 0$ a $\dim N = \dim M/2$.

2. T^*M a vytvárajúce funkcie

Načo sú nám Lagrangeove podvariety? Na všetko. Teda aspoň podľa Alana Weinsteina, ktorý zhrnul úlohu Lagrangeových variet takto:

Všetko je Lagrangeova varieta.

My síce uvidíme len niektoré veci, ktoré sú Lagrangeovými varietami, ale aj tak to bude zaujímavé.

Najprv sa však zoznámme so základným príkladom symplektických variet. Vezmime ľubovoľnú varietu M (fyzikálne "konfiguračný priestor") a vyrobíme z nej symplektickú varietu T^*M (fyzikálne "fázový priestor"), ktorej sa po slovensky hovorí *kodotykový bandl*. Bod variety T^*M je podľa definície dvojica: bod $x \in M$ a kovektor $p \in T^*_x M$. V lokálnych súradniciach x^i na M sa kovektor p rozpíše do bázy dx^i ako $p = p_i dx^i$. Bod K je zadaný n-ticou čísel x^i, kovektor v tom bode ďalšou n-ticou p_i; funkcie x^i a p_i sú teda lokálnymi súradnicami na $2n$-rozmernej variete T^*M.

Poďme teraz k symplektickej forme na T^*M. Najprv na T^*M zavedieme tzv. *tautologickú 1-formu* θ: v súradniciach je $\theta = p_i dx^i$, a bez súradníc (v bode $(x, p) \in T^*M$)

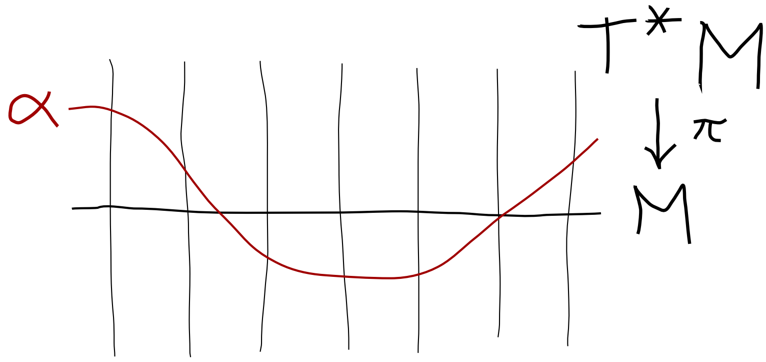
$$\theta_{(x,p)}(v) := p(\pi^* v), \tag{37}$$

kde $\pi : T^*M \to M$ je očividná projekcia. No a symplektická forma je

$$\omega = d\theta = dp_i \wedge dx^i.$$

V súradniciach je to naša stará známa.

Teraz zistíme, že ako vyzerajú Lagrangeove podvariety v T^*M. Určite je každé $T_x^*M \subset T^*M$ Lagrangeovou podvarietou, lebo na nej je $\theta = 0$. Z toho istého dôvodu je aj $M \subset T^*M$. Pozrieme sa, že ako vyzerajú všetky ostatné, presnejšie tie z nich, ktoré sú grafom nejakej 1-formy α (t.j. pretínajú každé $T_x^*M \subset T^*M$ v jednom bode a transverzálne):



Kedy je taký graf Lagrangeovou podvarietou? Ak sa na α pozrieme ako na zobrazenie $M \to T^*M$, tak z definície (37) máme $\alpha^*\theta = \alpha$, čiže $\alpha^*\omega = d\alpha$, teda *podvarieta je Lagrangeova práve keď je α uzavretá.*

Uzavreté 1-formy sa najlepšie vyrábajú z funkcií: z f vyrobíme df. Funkcia f za nazýva *vytvárajúcou funkciou* príslušnej Lagrangeovej podvariety (t.j. grafu 1-formy df). Globálne nemusí funkcia f taká, že $df = \alpha$ existovať, ale lokálne určite existuje (a je jednoznačná až na pripočítanie konštanty).

Všimnime si, že sme vlastne popísali Lagrangeove podvariety v každej symplektickej variete, teda aspoň lokálne, veď lokálne vyzerá každá symplektická varieta ako T^*M. Naozaj: na každej symplektickej variete existujú lokálne súradnice x^i, p_i, také, že $\omega = dp_i \wedge dx^i$. Funkcia f súradníc x^i nám zadáva Lagrangeovu podvarietu rovnicami

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}. \tag{38}$$

Ak by sme mali Lagrangeovu podvarietu takú, že nám neumožňuje vyjadriť p-čka ako funkcie x-ov, dá sa urobiť jednoduchý trik s povymieňaním vhodných x-ov za p-čka. Stačí uviesť jednoduchý príklad (v ktorom bude dimenzia symplektickej variety 4, a teda dimenzia Lagrangeovej podvariety 2, a celý trik spočíva v nahradení $x^2 \mapsto p_2$, $p_2 \mapsto -x^2$, ktoré zachováva symplektickú formu): majme funkciu $f(x^1, p_2)$, potom je

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial f}{\partial x^1} \\ x^2 &= -\frac{\partial f}{\partial p_2} \end{aligned} \tag{39}$$

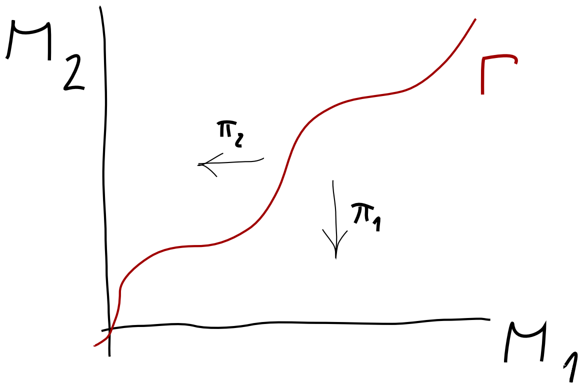
Lagrangeovou podvarietou. Pomocou takýchto zámen už nájdeme všetky Lagrangeove podvariety.

3. Symplektomorfizmy (čiže kanonické transformácie)

Už vieme nájsť (aspoň lokálne) všetky Lagrangeove podvariety, ale ešte stále nevieme, že na čo je nám to dobré. To sa teraz zmení.

Majme dve symplektické variety (M_1, ω_1) a (M_2, ω_2) (v praxi to bude často tá istá varieta) rovnakej dimenzie, a zaujímať nás budú zobrazenia $\phi : M_1 \to M_2$ zachovávajúce symplektickú formu, t.j. $\phi^*\omega_2 = \omega_1$ (všimnime si, že ϕ musí byť lokálne difeomorfizmom - plynie to z nedegenerovanosti symplektických foriem).

Graf Γ zobrazenia ϕ je podvarietou $M_1 \times M_2$. Vezmime teraz na $M_1 \times M_2$ symplektickú formu $\omega = \pi_2^*\omega_2 - \pi_1^*\omega_1$ (kde $\pi_{1,2} : M_1 \times M_2 \to M_{1,2}$ sú projekcie). Ak si stotožníme Γ s M_1 (pomocou projekcie π_1) tak môžeme napísať $\omega|_\Gamma = \phi^*\omega_2 - \omega_1$. Máme teda výsledok: *zobrazenie zachováva symplektickú formu práve keď je jeho graf Lagrangeovou podvarietou.*



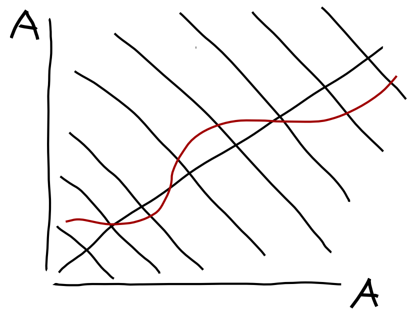
Pokiaľ sa nám podarí stotožniť $M_1 \times M_2$ z nejakým T^*M, budeme v ňom vedieť popísať všetky Lagrangeove podvariety (teda aspoň tie vhodne transverzálne), a teda aj všetky symplektické zobrazenia. Také stotožnenie sa dá urobiť (hoci len lokálne) pomocou lokálnych Darbouxových súradníc. Nech $\omega_1 = dp_i \wedge dx^i$, $\omega_2 = dP_i \wedge dX^i$, teda $\omega = dP_i \wedge dX^i + dx^i \wedge dp_i$. Ak na Γ sú P_i a x^i hladkými funkciami X-ov a p-čok, tak ako sme zistili vyššie, existuje funkcia $f(X, p)$ taká, že

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{\partial f}{\partial X^i} \\ x^i &= \frac{\partial f}{\partial p_i} \end{aligned}$$

Tieto rovnice nám zadávajú zobrazenie ϕ implicitne; treba z nich vyjadriť X-y a P-čka ako funkcie x-ov a p-čok. Funkcia f sa nazýva *vytvárajúcou funkciou zobrazenia* ϕ. Pokiaľ sa na Γ nedajú vyjadriť P_i a x^i ako funkcie X-ov a p-čok, ale dajú sa napríklad vyjadriť P_i a p_i ako funkcie X-ov a x-ov, môžeme použiť rovnaký trik ako pri (39): nájdeme funkciu $f(X, x)$ a

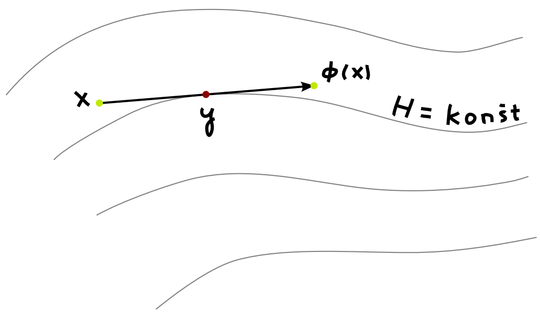
$$\begin{aligned} P_i &= \frac{\partial f}{\partial X^i} \\ p_i &= -\frac{\partial f}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Napokon si pozrime prípad, keď $M_1 = M_2 = A$, kde (A, ω) je afinný symplektický priestor (s konštantnou symplektickou formou). Popíšeme si, ako prirodzene stotožniť $A \times A$ s T^*A. Nakreslime si graf týchto zobrazení $A \to A$: identity, a všetkých stredových symetrií. Všetky tieto zobrazenia sú symplektomorfizmami, čiže ich grafy sú Lagrangeove podvariety $A \times A$.



Tento obrázok nám zadáva stotožnenie $A \times A$ s T^*A: diagonálu graf identity) stotožníme s $A \subset T^*A$ a antidiagonály (grafy stredových súmerností) s T^*_xA (kde x je stred súmernosti). Formulka je $(x, y) \in A \times A \mapsto ((x + y)/2, \omega(x - y, \cdot)/2)$.

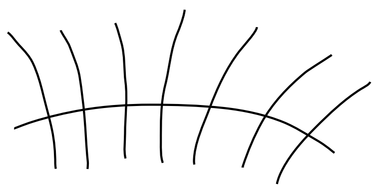
Ak je teraz H funkcia na A, tak zobrazenie $\phi : A \to A$, ktoré nám takto zadáva, je na obrázku:



V každom bode $y \in A$ spočítame $(\xi_H)_y$ a vložíme ho do A tak, aby y ležal v jeho strede. Zobrazenie ϕ posiela začiatok takto umiestneného vektora na jeho koniec. Podobnosť s tokom Hamiltonovského vektorového poľa ξ_H nie je náhodná.

4. Polarizácie, fázový priestor s magnetickým poľom

Už vieme (aspoň čiastočne), že Lagrangeove podvariety sú užitočné, a že zvlášť dobre sa hľadajú v T^*M. Čo potrebujeme k tomu, aby sme zadanú symplektickú varietu N aspoň lokálne stotožnili s nejakým T^*M? Potrebujeme N vyplniť Lagrangeovými podvarietami, z ktorých sa stanú T^*_xM, a ešte jednu Lagrangeovu podvarietu, ktorá ich transverzálne pretína, a z ktorej sa stane M.

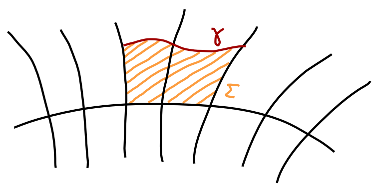


Foliácia symplektickej variety Lagrangeovými podvarietami sa nazýva *polarizácia.* (alebo presnejšie, reálna polarizácia; s komplexnými polarizáciami sa stretneme neskôr). No a tu je očakávané tvrdenie: *Ak je F polarizácia symplektickej variety (N, ω_N), a $M \subset N$ Lagrangeova podvarieta pretínajúca listy F transverzálne, potom sa dá prirodzene stotožniť okolie $M \subset N$ s okolím $M \subset N$; toto stotožnenie je dané jednoznačne požiadavkou, aby listy F prechádzali na T^*_xM a aby sa zachovala symplektická forma.*

Dôkaz tohoto tvrdenia je jednoduchý: stačí skonštruovať na N 1-formu θ_N tak, aby bola nulová na M aj na listoch F, a aby $d\theta_N = \omega_N$. Táto forma prejde na tautologickú formu θ_{T^*M} na T^*M. Definujeme ju tak, že povieme, čo je jej integrál cez ľubovoľnú krivku γ:

$$\int_\gamma \theta_N = \int_\Sigma \omega_N,$$

kde Σ je krivočiary štvoruholník, ktorého jedna strana je γ, jej susedné strany ležia v listoch F a protiľahlá strana leží v M. (Rozmyslite si, že týmto je θ_N dobre definovaná (aspoň lokálne) a má žiadané vlastnosti: stačí používať uzavretosť ω_N a Stokesovu vetu).



A keď už takúto θ_N máme, tak proste vyrobíme zobrazenie $s : N \to T^*M$, ktoré ju zobrazí na θ_{T^*M}: označíme $\pi_N : N \to M$ projekciu pozdĺž listov F, a každému bodu $b \in N$ priradíme kovektor $s(b) \in T^*_{\pi_N(b)}M$ predpisom,

$$s(b)(v) = \theta_N(\bar{v}),$$

kde $\bar{v} \in T_bN$ je ľubovoľný zdvih v (t.j. $\pi_{N*}\bar{v} = v$). Ak to vyzerá zložite, tak si rozmyslite, že je to v skutočnosti očividné.

Napokon sa zamyslime, čo by sa stalo, keby sme mali polarizáciu F, a M by bola len transverzálou, ale nie Lagrangeovou (t.j. $\omega_N|_M \neq 0$). Nič strašné sa nedeje: $\omega'_N = \omega_N - \pi^*(\omega_N|_M)$ by bola symplektickou formou, a voči nej by M už bola Lagrangeova. N sa dá teda naďalej stotožniť s T^*M, ale so symplektickou formou

$$\omega_{T^*M} + \pi^*B, \tag{40}$$

kde $B = \omega_N|_M$.

Symplektická forma (40) sa vyskytuje aj v mechanike. Varieta M je konfiguračný priestor a uzavretá 2-forma B na M je magnetické pole. Hamiltonove rovnice (pre Hamiltonián typu $p^2/2m + V(x)$) popisujú pohyb nabitej častice v potenciáli a v magnetickom poli; magnetické pole pritom nevstupuje do Hamiltoniánu, ale do symplektickej formy.

5. Koizotropné podvariety

Podvarieta C symplektickej variety M sa (prekvapujúco) nazýva *koizotropná*, ak je $T_PC \subset T_PM$ koizotropný podpriestor pre každý bod $P \in C$. Symplektická forma po zúžení na C prestane byť nedegenerovaná; dimenzia jej jadra je $\dim M - \dim C$ (prečo?). Označme si túto zúženú 2-formu proste ω. Všimnime si (pomocou Frobeniovej vety), že tieto jadrá tvoria integrabilnú distribúciu. Naozaj: ak máme vektorové polia u, v, ktoré sú v jadre, t.j.

$$i_u\omega = i_v\omega = 0,$$

tak potom aj

$$\mathcal{L}_u\omega = \mathcal{L}_v\omega = 0,$$

lebo $\mathcal{L}_u\omega = d(i_u\omega) + i_u d\omega$, a teda

$$0 = \mathcal{L}_u(i_v\omega) = i_{\mathcal{L}_u v}\omega = i_{[u,v]}\omega,$$

t.j. $[u, v]$ je tiež v jadre.

Jadrá formy ω nám teda dávajú foliáciu variety C, ktorú označíme F. Na priestor listov C/F (ak je to teda varieta; vo všeobecnosti musíme zobrať U/F, kde $U \subset C$ je dostatočne malá otvorená podmnožina) forma ω zostúpi, a stane sa z nej symplektická forma. Prečo? Zostúpi preto, lebo a) faktorizujeme jadrami a b) lebo ak $i_u\omega = 0$ tak aj $\mathcal{L}_u\omega = 0$. No a nedegenerovanou (a teda symplektickou) bude preto, lebo faktorizujeme jadrami.

Máme teda spôsob výroby symplektických variet: v symplektickej variete M zvolíme koizotropnú podvarietu C a z nej spravíme priestor listov C/F. Viac o tejto metóde, v prípade, keď sa C nájde pomocou grupy pôsobiacej na M, sa dozviete v prednáškach o symplektickej redukcii.

PREDNÁŠKA 8

Symplektická geometria, Moserov trik (MN)

Pre symplektickú varietu (M, ω) môžeme študovať také difeomorfizmy $\Psi \in \mathrm{Diff}(M)$, hladké zobrazenia z M do M, ktoré zachovávajú symplektickú formu

$$\omega = \Psi^* \omega.$$

Takéto zobrazenia nazývame *symplektomorfizmy*. Prirodzene, identita bude symplektomorfizmom a všetky symplektomorfizmy variety (M, ω) budú tvoriť grupu, ktorú značíme $\mathrm{Symp}(M)$.

Ukazuje sa, že nasledujúca metóda je vhodným nástrojom pre popis a pochopenie štruktúry grupy symplektomorfizmov. Pre jednoparametrickú triedu difeomorfizmov Ψ_t chceme nájsť podmienku, ktorá nám zaručí, že všetky difeomorfizmy Ψ_t zachovajú symplektickú štruktúru, t.j. $\Psi_t \in \mathrm{Symp}(M)$ pre všetky t. Ak naša jednoparametrická trieda zobrazení bude začínať v identite, teda pre $t = 0$ položíme $\Psi_0 = \mathrm{Id}$, dostaneme následne opis lokálnej štruktúry grupy symplektomorfizmov $\mathrm{Symp}(M, \omega)$ v blízkosti identity Id.

Pre uľahčenie situácie využijeme korešpondenciu medzi triedami difeomorfizmov $\Psi_t \in \mathrm{Diff}(M)$ a triedami vektorových polí $X_t \in \mathcal{X}(M)$. Každú jednoparametrickú triedu difeomorfizmov Ψ_t začínajúcu v identite Id môžeme popísať pomocou trajektórií ňou generovaných, teda každému bodu variety $p \in M$ zodpovedá trajektória – hladká krivka, zložená z bodov $\Psi_t(p)$. Vektorové pole X_τ v bode p bude tvorené dotykovým vektorom k trejektórii v bode $\Psi_\tau(p)$, stiahnuté naspäť do bodu p. Toto môžeme zapísať ako

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=\tau} \Psi_t = X_\tau \circ \Psi_\tau, \quad \text{kde} \quad X_\tau \circ \Psi_\tau = \Psi_{\tau *} X_\tau.$$

Symplektická forma, vďaka nedegenerovanosti, určuje izomorfizmus medzi vektorovými poliami a 1-formami nasledujúcim predpisom

$$\mathcal{X}(M) \to \Omega^1(M): \qquad X \mapsto \iota_X \omega = \omega(X, \cdot).$$

Hovoríme, že $X \in \mathcal{X}(M)$ je *symplektické vektorové pole* ak je $\iota_X \omega$ uzavretá forma, t.j. $d(\iota_X \omega) = 0$. Nasledujúce tvrdenie dáva do súvisu symplektomorfizmy a symplektické vektorové polia.

TVRDENIE 8.1. *Nech M je uzavretá varieta a $\Psi_t \in \mathrm{Diff}(M)$ je hladká trieda difeomorfizmov generovaná triedou vektorových polí $X_t \in \mathcal{X}(M)$. Potom je zobrazenie Ψ_t symplektomorfizmom pre každé t vtedy a len vtedy, ak X_t je symplektickým vektorovým poľom pre každé t.*

Navyše, ak $X, Y \in \mathcal{X}(M, \omega)$ sú symplektické vektorové polia, potom je aj $[X, Y]$ symplektické vektorové pole a platí

$$\iota_{[X,Y]} \omega = -dH, \qquad \textit{kde } \omega(X, Y) = H.$$

DÔSLEDOK 8.2. *Algebra symplektických vektorových polí $\mathcal{X}(M, \omega)$ je Lieovou algebrou grupy symplektomorfizmov* $\mathrm{Symp}(M, \omega)$.

DÔKAZ. Podmienkou, aby Ψ_t bol symplektomorfizmom vzhľadom na symplektickú formu ω pre každé t je

$$\Psi_t^* \omega = \omega,$$

čo je to isté ako

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=\tau} (\Psi_t^* \omega) = 0, \qquad \text{pre všetky } \tau.$$

Zopakujme si definíciu Lieovej derivácie a Cartanových vzorcov. V našom prípade pre tok – triedu difeomorfizmov Ψ_t, generovaných konštantným vektorovým poľom X a ľubovoľný tenzor A platí

$$\mathcal{L}_X A = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\Psi_t^* A),$$

$$\mathcal{L}_X A = \iota_X dA + d(\iota_X A).$$

Podmienku zachovávania symplektickej štruktúry môžeme pomocou týchto rovností upraviť nasledovne

$$0 \equiv \frac{d}{dt}\bigg|_{t=\tau} (\Psi_t^* \omega) = \Psi_\tau^* \circ (\mathcal{L}_{X_\tau} \omega) = \Psi_\tau^* (\iota_{X_\tau} d\omega + d(\iota_{X_\tau} \omega)) = \Psi_\tau^* (d(\iota_{X_\tau} \omega)).$$

V prvej rovnosti sme využili fakt, že tok Ψ_τ je generovaný poľom X_τ, teda platí $\frac{d}{dt}\big|_{t=\tau} \Psi_t = X_\tau \circ \Psi_\tau = \Psi_{\tau *} X_\tau$, v poslednej rovnosti využívame fakt, že ω je symplektická forma, čiže $d\omega = 0$. Takto dostávame podmienku $d(\iota_{X_\tau}\omega) = 0$, čo je presne podmienka pre to, aby X_τ bolo symplektické vektorové pole.

Druhú časť tvrdenia, uzavretosť symplektických vektorových polí vzhľadom na Lieovu zátvorku, dokážeme podobne. Nech $X, Y \in \mathcal{X}(M, \omega)$ sú symplektické vektorové polia, a nech vektorové pole Y generuje tok Ψ_t. Potom

$$[X, Y] = \mathcal{L}_X Y = -\mathcal{L}_Y X = -\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Psi_t^* X,$$

a s použitím Cartanových vzorcov dostávame

$$\iota_{[X,Y]}\omega = -\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \iota(\Psi_t^* X)\omega = -\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \iota(\Psi_t^* X)(\Psi_t^* \omega) = -\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Psi_t^* (\iota_X \omega) =$$
$$= -\mathcal{L}_Y(\iota_X\omega) = -(\iota_Y d(\iota_X\omega) + d(\iota_Y \iota_X \omega)) = -d(\iota_Y \iota_X \omega) = -d(\omega(X, Y)),$$

kde člen $d(\iota_X\omega)$ bude nulový vďaka tomu, že X je symplektické vektorové pole. Z toho ale už vyplýva, že 1-forma $\iota_{[X,Y]}\omega$ je uzavretá, teda $\iota_{[X,Y]}$ je symplektické vektorové pole. □

1. Moserov trik

V predchádzajúcej časti sme zisťovali kedy jednoparametrická trieda difeomorfizmov Ψ_t variety M zachováva jej symplektickú štruktúru ω. V nasledujúcej časti venovanej Moserovmu triku, niekedy označovanému aj ako Moserov argument, budeme pracovať okrem jednoparametrickej triedy difeomorfizmov aj s premenlivými symplektickými štruktúrami. Základom bude špeciálna voľba symplektických štruktúr, keď budeme požadovať aby

$$\frac{d}{dt}\omega_t = d\sigma_t,$$

teda aby časové derivácie symplektickej formy boli vždy exaktné.

Podobne ako v predošlej časti uvažujme jednoparametrickú triedu difeomorfizmov Φ_t začínajúcu v identickom zobrazení, generovanú časovo závislým vektorovým poľom X_t, teda $\frac{d}{dt}\big|_{t=\tau} \Phi_t = X_\tau \circ \Phi_\tau = \Phi_\tau^* X_\tau$ a $\Phi_0 = \mathrm{Id}$. Chceme aby vplyvom toku Φ_t symplektická forma ω_0 postupne "pretekala" do foriem ω_t, teda aby platilo

$$\Phi_t^* \omega_t = \omega_0.$$

Diferencovaním v $t = \tau$ a použitím Cartanových vzorzov dostávame

$$0 = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=\tau} \omega_0 = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=\tau} (\Phi_t^* \omega_t) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=\tau} (\Phi_\tau^* \omega_t + \Phi_t^* \omega_\tau) =$$

$$= \Phi_\tau^* \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=\tau} \omega_t \right) + \Phi_\tau^*(\mathcal{L}_{X_\tau} \omega_\tau) = \Phi_\tau^*(d\sigma_\tau) + \Phi_\tau^*(\iota_{X_\tau} d\omega_\tau + d(\iota_{X_\tau} \omega_\tau)) =$$

$$= \Phi_\tau^*(d(\sigma_\tau + \iota_{X_\tau} \omega_\tau)).$$

Ak σ_τ a X_τ budú také, že $\sigma_\tau + \iota_{X_\tau} \omega_\tau = 0$ pre všetky τ, potom dostaneme na ľavej strane identicky nulu. Lenže ω_τ je nedegenerovaná 2-forma a také X_τ vieme vždy nájsť.

Poznámka: Moserov trik pracuje bez problémov pre kompaktnú varietu M. Potom na základe jednoduchej kohomologickej argumetácie dostaneme globálnu existenciu 1-formy σ_t a vektorového poľa X_t pre všetky časy t.

Ak pracujeme na nekompaktnej oblasti, potrebujeme zabezpečiť existenciu riešení v príslušnom časovom intervale.

VETA 8.3 (Darbouxova veta). *Každá symplektická forma na variete M je lokálne difeomorfná štandardnej forme ω_0 na $\mathbb{R}^{2n}$.*

DÔKAZ. Nech p je bod variety M a $\Psi : O(p) \to \mathbb{R}^{2n}$ je lokálna súradnicová sústava, ktorá zobrazuje bod p do počiatku.

Potom v $\mathbb{R}^{2n}$ máme symplektickú formu ω', ktorá je push-forwardom formy ω z M. Potrebujeme teda ukázať, že existuje difeomorfizmus $\mathbb{R}^{2n}$ zobrazujúci ω' do ω_0 v blízkosti počiatku. Lokálnu súradnicovú sústavu Ψ môžeme prípadne zložiť s lineárnym zobrazením tak, aby sme dostali $\omega' = \omega_0$ v nule.

Uvažujme triedu $\omega_t = (1-t)\omega' + t\omega_0$. Keďže v počiatku platí rovnosť $\omega_t = \omega_0$ a nedegenerovanosť symplektickej formy je otvorená podmienka, bude vždy existovať nejaké guľové okolie U obsahujúce nulu také, že ω_t je nedegenerovaná forma v U.

Potom $\frac{d}{dt}\omega_t = -\omega' + \omega_0$. Keďže oblasť U je kontraktibilná a forma $\omega_0 - \omega'$ je uzavretá, existuje 1-forma σ taká, že $d\sigma = \omega_0 - \omega'$. Navyše, odčítaním konštantnej hodnoty $\sigma(0)$ vieme zabezpečiť aby $\sigma = 0$ v počiatku. Preto príslušné vektorové pole X_t zodpovedajúce forme σ bude tiež nulové v nule, a následne difeomorfizmy Φ_t budú fixovať počiatok.

Nakoľko nula je fixný bod zobrazení Φ_t, existuje nejaké jej okolie V také, že trajektórie $\Phi_t(q)$ pre body $q \in V$ a časy $t \in [0,1]$ zostanú vovnútri U. Tým pádom sú všetky zobrazenia dobre definované a $\Phi_1^*(\omega') = \omega_0$. Zložením Φ_1 s Ψ dostaneme požadovaný difeomorfizmus. □

Podobný trik sa dá použiť aj pre zostrojenie difeomorfizmov pre dve symplektické formy ω_0 a ω_1, ktoré sa zhodujú na nejakej podvariete. Ide nazoaj o zovšeobecnenie Darbouxovej vety, nakoľko v predchádzajúcom prípade sa symplektické formy ω' a ω_0 zhodovali v jednom bode – v počitatku.

V špeciálnom prípade, keď je Q lagrangeovská podvarieta variety M, čiže jej dimenzia je n, dostávame pre $p \in Q$ nasledovné: dotykový priestor $TM|_p$ v bode p sa rozkladá ako $TM|_p = TQ|_p \oplus \nu Q$, kde TQ je dotyková fibrácia podvariety Q a νQ je jej normálová fibrácia. Navyše, νQ je ako vektorová fibrácia izomorfná s kodotykovou fibráciou T^*Q.

Ako sme videli aj v kapitole 7, na T^*Q môžeme prirodzeným spôsobom zaviesť symplektickú štruktúru. Nasledujúce tvrdenie, ktoré si uvedieme bez dôkazu, nám vypovedá o tom, že symplekická štruktúra v okolí lagrangeovskej podvariety Q má kanonický tvar, t.j. dá sa stotožniť s prirodzenou symplektickou štruktúrou na T^*Q.

TVRDENIE 8.4 (Veta o lagrangeovskom okolí). *Nech $Q \subset M$ je kompaktná lagrangeovská podvarieta. Potom existuje okolie $N(Q_0)$ nulovej sekcie v TQ^*, okolie V lagrangeovskej podvariety Q v M a difeomorfizmus $\Phi : N(Q_0) \to V$, ktorý zobrazuje $\Phi^*\omega = -d\theta$, kde θ je tautologická 1-forma na T^*Q a Φ je identické zobrazenie na podvariete Q.*

PREDNÁŠKA 9

Príklady symplektických variet (MF)

- Kanonická symplektická štruktúra v „súradnicovom" $\mathbb{R}^{2n}$ a $\mathbb{C}^n$
- T^*M ako bežný fázový priestor v teoretickej mechanike
- Orbity koadjungovaného pôsobenia

V tejto prednáške opíšeme tri zdroje konkrétnych symplektických variet. Najjednoduchším príkladom sú párnorozmerné kartézske priestory $\mathbb{R}^{2n}$. V druhom príklade sa začína z ľubovoľnej variety M a kanonicky sa jej priradí (iná) varieta T^*M, na ktorej je automaticky symplektická forma. V treťom príklade je na vstupe Lieova grupa G (plus bod v duáli jej Lieovej algebry) a na výstupe istá párnorozmerná varieta, na ktorej je opäť zadarmo symplektická forma.

Kanonická symplektická štruktúra v $\mathbb{R}^{2n}$ a $\mathbb{C}^n$. To $\mathbb{R}^{2n}[q,p]$ je vlastne prípad, cez ktorý sa k tomu celému dostávajú fyzici - je to to, čo sa opísalo v (28). Ak zapíšeme kanonické páry x^a, p_a v komplexnom jazyku ako

$$z^a = x^a + ip_a \qquad \bar{z}^a = x^a - ip_a$$

tak dostávame

$$\omega = dp_a \wedge dq^a = (i/2)d\bar{z}^a \wedge dz^a \tag{41}$$

Vyjadrenie (41) platí (podľa Darbouxovej vety) na ľubovoľnej symplektickej variete *lokálne*, tu však platí *globálne* a navyše priamo v „definičných" súradniciach.

Bežný fázový priestor ako T^*M. Majme *konfiguračný priestor* nejakej sústavy s n stupňami voľnosti, t.j. hladkú varietu M s lokálnymi súradnicami x^a. Potom sa jej dá kanonicky priradiť istá varieta dvojnásobného rozmeru, ktorá sa označuje T^*M a hrá v mechanike úlohu *fázového* priestoru. Jej bodmi sú všetky možné *kovektory* vo všetkých možných bodoch pôvodnej variety M. Návod na výrobu „kanonického" atlasu na T^*M vyzerá takto: uvažujeme súradnicovú oblasť $\mathcal{O}[x^a]$. Kovektory v tejto oblasti sú čiastočne opísané hodnotami súradníc x^a (už vieme *kde* je daný kovektor, ale stále nevieme, *ktorý* to presne je). V $\mathcal{O}$ však máme k dispozícii aj súradnicovú bázu pre kovektory, takže uvažovaný kovektor $p \in T^*_xM$ môžeme jednoznačne rozložiť podľa nej, $p = p_a dx^a$. Čísla p_a už pridávajú presne to, čo doteraz chýbalo: $2n$ čísel x^a, p_a vzájomne jednoznačne kóduje všetky tie kovektory, ktoré žijú v bodoch oblasti $\mathcal{O}$. Tie, ktoré nežijú v $\mathcal{O}$, však nemusia smútiť - určite žijú v nejakej inej súradnicovej oblasti $\mathcal{O}'$ a tam sa dá zopakovať to isté. Ľahko sa preverí, že tak vznikne atlas na množine všetkých kovektorov na M, čiže vznikne T^*M už ako hladká varieta.

Takto konkrétne urobený atlas je veľmi dobre ušitý na mieru dôležitým veciam, ktoré sa na T^*M odohrávajú. Napríklad je zrejmé, že existuje prirodzené zobrazenie (kanonická projekcia) $\pi : T^*M \to M$, ktoré kovektoru p v bode x priradí samotný bod x. V týchto súradniciach to dáva $(x^a, p_a) \mapsto x^a$, čo je najjednoduchší možný („kanonický") tvar pre zobrazenie takého typu.

My sa teraz ale zameriame na kľúčový objekt na T^*M, kanonickú symplektickú formu. Vzniká vonkajšou deriváciou „hlbšieho" objektu, *kanonickej 1-formy θ*. Tá sa definuje takto: nech p je bod na T^*M a W je vektor v tomto bode. Potom

$$\langle \theta, W\rangle := \langle p, \pi_* W\rangle \tag{42}$$

Vektor W sa teda najprv sprojektuje do $x \equiv \pi(p) \in M$ a tam sa dosadí do 1-formy $p \in T^*_x M \equiv \pi^{-1}(x)$, ktorá zodpovedá bodu $p \in T^*M$. Ľahko sa overí, že takto (pobodovo) dostávame naozaj 1-formu na variete T^*M a že jej súradnicové vyjadrenie je

$$\theta = p_a dx^a$$

Potom je zrejmé, že vonkajšou deriváciou z nej dostaneme (kanonickú exaktnú) *symplektickú* formu na T^*M,

$$\omega := d\theta = dp_a \wedge dx^a \tag{43}$$

Vidíme, že kanonické súradnice (x^a, p_a) sú pre ňu zároveň kanonické v zmysle Darbouxovej vety! (Jej nedegenerovanosť okamžite vidno z tohoto súradnicového vyjadrenia, pozri napr. (27)).

Orbity koadjungovaného pôsobenia. *Koadjungované pôsobenie* Ad^*_g Lieovej grupy G je kontragradientná (anti)reprezentácia k pridruženej reprezentácii Ad. Funguje teda v lineárnom priestore $\mathcal{G}^*$ duálnom k Lieovej algebre $\mathcal{G}$ grupy G a definuje sa predpisom

$$\langle \mathrm{Ad}^*_g X^*, Y\rangle := \langle X^*, \mathrm{Ad}_g Y\rangle \qquad\qquad X^* \in \mathcal{G}^*,\ Y \in \mathcal{G}$$

(Prvky z $\mathcal{G}$ označujeme $X, Y, \dots$, prvky z $\mathcal{G}^*$ zasa $X^*, Y^*, \dots$)

$\mathcal{G}^*$ je lineárny priestor a zároveň (samozrejme) varieta. Existujú preto na ňom lineárne funkcie, ktoré môžeme stotožniť s kovektormi na $\mathcal{G}^*$, t.j. s prvkami $\mathcal{G}$. Nech Φ_X je taká lineárna funkcia (daná prvkom $X \in \mathcal{G}$, takže $\Phi_X(Y^*) = \langle Y^*, X\rangle$). Jej pull-back pravým pôsobením $R_g \equiv \mathrm{Ad}^*_g$ je opäť lineárna funkcia; je pritom daná prvkom $\mathrm{Ad}_g X$:

$$R^*_g \Phi_X = \Phi_{\mathrm{Ad}_g X} \qquad\qquad R_g \equiv \mathrm{Ad}^*_g$$

▼ $(R^*_g \Phi_X)(Y^*) = \Phi_X(\mathrm{Ad}^*_g Y^*) = \langle \mathrm{Ad}^*_g Y^*, X\rangle = \langle Y^*, \mathrm{Ad}_g X\rangle$ ▲

Infinitezimálnou verziou toho istého tvrdenia je rovnica

$$\xi_X \Phi_Y = \Phi_{[X,Y]} \tag{44}$$

kde ξ_X je generátor (fundamentálne pole) pôsobenia $R_g \equiv \mathrm{Ad}^*_g$, t.j. je definovaný vzťahom

$$\xi_X(Y^*)\Phi = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \Phi(\mathrm{Ad}^*_{\exp tX} Y^*)$$

▼ Položiť $g = \exp tZ$, derivovať v nule a využiť $\mathrm{ad}_X Y = [X, Y]$ ▲

Uvažujme teraz *orbitu* $\mathcal{O}_{Z^*}$, generovanú bodom $Z^* \in \mathcal{G}^*$. Dotykový priestor *k orbite* v bode Z^* sa (ako vždy pre orbity) naťahuje na hodnoty fundamentálnych polí v tomto bode. Ak chceme preto definovať nejakú diferenciálnu formu *na orbite*, stačí určiť jej hodnotu na fundamentálnych poliach. Definujme v dotykovom priestore $T_{Z^*}\mathcal{O}_{Z^*}$ *k orbite* v bode Z^* 2-formu ω_{Z^*} vzťahom

$$\omega_{Z^*}(\xi_X, \xi_Y) := \langle Z^*, [X, Y]\rangle \equiv \Phi_{[X,Y]}(Z^*) \tag{45}$$

Takto dostávame pobodovo hladkú diferenciálnu 2-formu ω na variete $\mathcal{O}_{Z^*}$. Ukazuje sa, že to je *symplektická forma.*

▼ Uzavretosť: v ľubovoľnom bode na orbite platí

$$\begin{aligned} d\omega(\xi_X,\xi_Y,\xi_Z) &= (\xi_X\omega(\xi_Y,\xi_Z) + \text{ cyklicky}) \\ &\quad - (\omega([\xi_X,\xi_Y],\xi_Z) + \text{ cyklicky}) && \text{Cartanov vzorec} \\ &= (\xi_X\Phi_{[Y,Z]} + \text{ cyklicky}) \\ &\quad - (\Phi_{[[X,Y],Z]}) + \text{ cyklicky}) && \text{definícia } \omega \\ &= 2\Phi_{[[X,Y],Z]+\text{ cyklicky}} && \text{podľa (44)} \\ &= 2\Phi_0 = 0 && \text{Jacobiho identita} \end{aligned}$$

Nedegenerovanosť: platí $\omega_{Z^*}(\xi_X,\xi_Y) := \Phi_{[X,Y]}(Z^*) = \xi_X(Z^*)\Phi_Y$; ak je teda $\omega_{Z^*}(\xi_X,\xi_Y) = 0$ pre všetky ξ_Y, vektor $\xi_X(Z^*)$ dáva nulu pri pôsobení na všetky *lineárne* funkcie, ale potom aj na *všetky* funkcie, čiže vektor ξ_X v bode Z^* je *nulový*.
▲

Zistili sme teda, že orbita $\mathcal{O}_{Z^*} \subset \mathcal{G}^*$ daná ľubovoľným bodom $Z^* \in \mathcal{G}^*$ je symplektickou varietou. (Ak je orbita 0-rozmerná, t.j. len bod Z^*, tak ide o degenerovaný prípad a samozrejme žiadna symplektická varieta nevzniká.) Všimnime si ešte, že kombináciou (44) a (45) dostávame

$$i_{\xi_X}\omega = -d\Phi_X$$

čo znamená, že generátory symetrie sú tu *hamiltonovské* polia (a teda špeciálne aj to, že táto symplektická forma je *invariantná* voči pôsobeniu grupy). Ide o *homogénne symplektické* variety.

Ako to celé vyzerá napríklad pre grupu $G = SO(3)$? Vtedy je Lieova algebra $\mathcal{G} = so(3)$ trojrozmerná a dá sa predstaviť ako obyčajný trojrozmerný priestor, v ktorom žijeme. To isté platí samozrejme aj pre jej duál $\mathcal{G}^* = (so(3))^*$. Killingov-Cartanov metrický tenzor, ktorý je všeobecne daný vzťahom $K_{ij} = c^l_{ir}c^r_{jl}$, tu vychádza úmerný δ_{ij}. To znamená, že ak ho použijeme na zobrazenie $so(3) \to (so(3))^*$ (budeme ním „spúšťať index" na vektoroch z $so(3)$), formálne prehadzujeme čokoľvek z $so(3)$ do $(so(3))^*$, ale „v skutočnosti" sa nič nebude meniť. To umožňuje napríklad vyšetrovať namiesto orbít (voči Ad^*) v duáli Lieovej algebry $(so(3))^*$ orbity (voči Ad) v samotnej Lieovej algebre $so(3)$.

No a ako vyzerajú orbity Ad pôsobenia v Lieovej algebre $so(3)$? Výpočet ukazuje, že samotné Ad pôsobenie sa tu realizuje ako *obyčajné rotácie* okolo počiatku. Potom je jasné, že orbity sú koncentrické sféry so stredom v počiatku.

No a už asi neprekvapí, že ako kanonické symplektické formy na týchto sférach vychádzajú obyčajné „okrúhle" (rotačne invariantné) 2-formy objemu.

Na *orbitách* koadjungovanej akcie v $\mathcal{G}^*$ sme našli kanonickú *symplektickú* štruktúru. Ukazuje sa, že v skutočnosti existuje *na celej* variete $\mathcal{G}^*$ kanonický Poissonov tenzor (teda aj *Poissonova zátvorka*, pozri (20)), je však degenerovaný a nedegenerované je len jeho *ohraničenie na orbity*. Poissonova zátvorka dvoch *lineárnych* funkcií na variete $\mathcal{G}^*$ sa definuje vzťahom

$$\{\Phi_Y,\Phi_Z\} := \Phi_{[Y,Z]} \equiv \xi_Y\Phi_Z$$

a ako vieme z (23), to ju už fixuje aj na *ľubovoľných* funkciách; konkrétne vychádza

$$\{x_i,x_j\} = c^k_{ij}x_k \qquad \{f,g\} = c^k_{ij}x_k(\partial^i f)(\partial^j g)$$

PREDNÁŠKA 10

Symplektická a komplexná geometria 1 (PŠ)

1. Hermitovský skalárny súčin

Vezmime si komplexný vektorový priestor V s hermitovským skalárnym súčinom $\langle , \rangle$. Pripomeňme si vlastnosti $\langle , \rangle$:

(1) $\langle u, u \rangle > 0$ pre každý nenulový vektor $u \in V$,
(2) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ $\forall u, v \in V$,
(3) $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ a $\forall u, v \in V$.

Všimnime si, že imaginárna časť $\langle , \rangle$ je $\mathbb{R}$-lineárna v oboch argumentoch, antisymetrická, a nedegenerovaná (prečo?); je to teda symplektická forma. Len sa musíme zamyslieť, že na čom: na V, ktorý ale teraz chápeme ako reálny vektorový priestor (a ktorého (reálna) dimenzia je dvojnásobok pôvodnej (komplexnej) dimenzie). Označíme si teda

$$\omega(u, v) := Im \langle u, v \rangle .$$

Mimochodom,

$$(u, v) := Re \langle u, v \rangle$$

je tiež nedegenerovaná, ale symetrická bilineárna forma. Je aj pozitívne definitná. Môžeme (a budeme) ju používať ako skalárny súčin.

Ak je $U \subset V$ komplexný vektorový podpriestor, tak $\langle , \rangle |_U$ je samozrejme hermitovský skalárny súčin na U, a teda $\omega|_U$ je symplektická forma. Ak je $M \subset V$ komplexná podvarieta (t.j. hladká podvarieta, taká, že pre každý bod $P \in M$ je $T_P M \subset V$ ***komplexný*** vektorový podpriestor), tak je teda $\omega|_M$ symplektickou formou na M (všimnime si, že zúženie ω na ľubovoľnú (nie nutne komplexnú) podvarietu je automaticky uzavretá 2-forma; zistili sme teda len to, že tá 2-forma je na komplexných podvarietach nedegenerovaná).

Máme teda množstvo zaujímavých príkladov symplektických variet - všetky komplexné podvariety $\mathbb{C}^n$.

2. Minimálne plochy

Pripomeňme si: ak je U komplexný vektorový priestor so hermitovským skalárnym súčinom, a V jeho komplexný podpriestor, tak $\omega|_V$ je nedegenerovaná. Nedegenerovaná však môže byť aj pre podpriestory, ktoré nie sú komplexné (naozaj - stačí zobrať podpriestor rovnakej *reálnej* dimenzie ako V, ktorý je dosť blízky k V, a zúženie ω bude nedegenerovaná forma).

Komplexné podpriestory U sa predsa len dajú charakterizovať pomocou zúženia ω: *symplektický objem sa na nich rovná metrickému, kým na všetkých ostatných podpriestoroch je symplektický objem menší než metrický.*

$$Vol_\omega \leq Vol_{(,)}, \quad \text{rovnosť len pre komplexné podpriestory.}$$

Toto tvrdenie sa nazýva Wirtingerova nerovnosť.

Poďme teraz nerovnosť dokázať. Nech $W \subset U$ je reálny podpriestor (reálnej) dimenzie $2k$, a nech $e_1, \ldots, e_{2k}$ je jeho báza. Symplektický objem rovnobežnostena daného touto bázou je

$$Vol_\omega = \left|\frac{\omega^k}{k!}(e_1, \dots, e_{2k})\right|.$$

Predpokladajme, že báza je ortonormálna voči $(,)$, takže

$$Vol_{(,)} = 1.$$

Pomocou skalárneho súčinu $(,)$ môžeme z $\omega|_W$ urobiť lineárne zobrazenie $T : W \to W$ zvyčajným spôsobom:

$$(Tu, v) := \omega(u, v)$$

(teda matica T bude v ortonormálnej báze na W rovnaká, ako matica ω). Čo je zač T? Z definície platí

$$\omega(u, v) = (iu, v).$$

Zobrazenie T je teda násobenie číslom i (ktoré nás môže vyhodiť z W ak W nie je komplexný podpriestor!), zložené s ortogonálnou projekciou $iW \subset U \to W$. Násobenie i zachováva skalárny súčin (a teda aj metrický objem), projekcia ale objem zmenšuje, okrem prípadu, že by bola identitou, t.j. keby $iW = W$, t.j. keby W bol komplexným podpriestorom (sme na správnej stope!). Máme teda

$$|\det T| \leq 1, \quad \text{rovnosť práve keď je } W \text{ komplexný podpriestor.}$$

Zvyšok už je len maticová algebra. Platí totiž

$$\left(\frac{\omega^k}{k!}(e_1, \dots, e_{2k})\right)^2 = \det T.$$

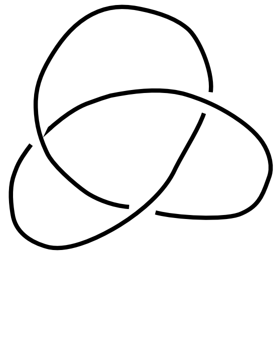
(Skúste sa o tom presvedčiť, či už násilne, vyjadrením determinantu pomocou permutácií, alebo abstraktným argumentom bez výpočtov. Ak si o tom chcete prečítať niečo viac, hľadajte vetu *druhá mocnina Pfaffiánu sa rovná determinantu.*) Tým pádom

$$Vol_\omega \leq 1, \quad \text{rovnosť práve keď je } W \text{ komplexný podpriestor.}$$

čo sme chceli dokázať.

Nech je teraz $M \subset V$ komplexná podvarieta komplexnej dimenzie k. Vezmime z nej len kompaktný kus (napríklad tak, že pretneme M s guľou s polomerom R), ktorý je ohraničený nejakou reálnou podvarietou X reálnej dimenzie $2k - 1$. *Spomedzi všetkých reálnych podvariet dimenzie $2k$, ktoré sú ohraničené X-om, má M najmenší ($2k$-rozmerný) objem.* Prečo? Keďže $\omega^k/k!$ je uzavretá forma, všetky tie podvariety majú rovnaký *symplektický* objem; len pre komplexnú podvarietu však bude rovný (metrickému) objemu, inak bude menší. Takto nájdeme veľa zaujímavých podvariet s minimálnym objemom.

Ako jednoduchý príklad vezmime $V = \mathbb{C}^2$ (s komplexnými súradnicami x a y) a M zadané rovnicou $x^2 = y^3$. Ak pretneme M (3-rozmernou) sférou s polomerom R, dostaneme v tej sfére krivku parametrizovanú ako $x = \sqrt{R}e^{i\phi/2}$, $y = \sqrt[3]{R}e^{i\phi/3}$. Súradnica x teda obehne $2\times$ a y $3\times$ po tore $|x| = \sqrt{R}$, $|y| = \sqrt[3]{R}$. Krivka je teda "trojlístkový" uzol ako na obrázku.



M je minimálnou plochou napnutou vo V na tento uzol. V počiatku má singularitu (takže to vlastne nie je varieta, ale jeden singulárny bod nič nepokazí), lebo jej priesek so sférou je vždy zauzlený, pre ľubovoľne malý polomer sféry. To, že existujú minimálne plochy so singularitami, je dosť prekvapujúce (zdalo by sa, že sa bude dať plocha zmenšiť vyhladením singularity), ale ako vidíme, je to tak.

3. $\mathbb{CP}^n$ ako Kählerova varieta, stupeň ako objem

Komplexný vektorový priestor s hermitovským skalárnym súčinom, a takisto každá jeho komplexná podvarieta, má takúto geometrickú štruktúru: hermitovský skalárny súčin na dotykových priestoroch, taký, že jeho imaginárna časť je uzavretá (a tým pádom symplektická) forma. Komplexným varietam s touto štruktúrou (či už sú podvarietami nejakého V alebo nie) sa hovorí *Kählerove variety*.

Dôležitým príkladom Kählerovej variety je (pre každé $n \in \mathbb{N}$) n-rozmerný komplexný projektívny priestor $\mathbb{CP}^n$. Definovaný je takto: začneme s $n+1$-rozmerným vektorovým priestorom V, a vytvoríme priestor komplexných priamok prechádzajúcich jeho počiatkom (t.j. jednorozmerných podpriestorov); inými slovami, z V počiatok vyhodíme, a potom stotožníme v a λv pre každé $v \in V$ a $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$. Ak si na V zvolíme hermitovský skalárny súčin, $\mathbb{CP}^n$ z neho zdedí Kählerovu štruktúru. Naozaj: ak je L bod $\mathbb{CP}^n$, t.j $L \subset V$ je jednorozmerný podpriestor, zvolíme si jeho reprezentanta $v \in L$ tak, aby mal dĺžku 1 (v je dané jednoznačne až na vynásobenie komplexným číslom s absolútnou hodnotou 1), a potom môžeme prirodzene stožniť $T_L\mathbb{CP}^n$ s $L^\perp$ (ako?), a tým pádom získať hermitovský skalárny súčin na $T_L\mathbb{CP}^n$. Toto stotožnenie síce závisí od voľby v (ako to?), ale skalárny súčin nie: ak namiesto v vezmeme λv, $|\lambda| = 1$, tak sa $L^\perp$ vynásobí λ-ou, čo je samozrejme unitárna transformácia. Potrebujeme ešte overiť, že imaginárna časť skalárneho súčinu na $T\mathbb{CP}^n$ je uzavretá. Je to kvôli tomu, že sa zdedí zo symplektickej formy na V – detaily ale necháme na prednášku o symplektickej redukcii.

(Toto bolo veľmi neslušné – presunúť zodpovednosť za dôkaz na niekoho iného. Takže si predsa len nejaký dôkaz urobíme, pomocou symetrie. Symplektická forma ω (teda zatiaľ nevieme, či je symplektická, chceme totiž dokázať, že $d\omega = 0$) na $\mathbb{CP}^n$ je invariantná voči unitárnym transformáciam priestoru V. Pre $L \in \mathbb{CP}^n$ (t.j. $L \subset V$ je 1-rormerný podpriestor) si definujme unitárnu transformáciu $Z_L : V \to V$ tak, že $Z_L|_L = id$ a $Z_L|_{L^\perp} = -id$ (t.j. zrkadlenie voči L). Transformácia Z_L nechá bod $L \in \mathbb{CP}^n$ na mieste, a na $T_L\mathbb{CP}^n$ pôsobí ako -1 (prečo?). 3-forma $d\omega$ teda pod vplyvom Z_L v bode L zmení znamienko (lebo 3 je nepárne číslo). Lenže ω je invariantná voči Z_L, teda aj $d\omega$ je invariantná, a znamienko teda nemení! Jediná cesta von je, že $d\omega = 0$ v L, a keďže L bol ľubovoľný bod $\mathbb{CP}^n$, ω je uzavretá forma.)

Vďaka symplektickej štruktúre na $\mathbb{CP}^n$ existuje pozoruhodný vzťah medzi symplektickou a algebraickou geometriou. Každá komplexná projektívna varieta (algebraická podvarieta $\mathbb{CP}^n$) je vďaka nej Kählerovou varietou. Ak je $X \in \mathbb{CP}^n$ algebraická podvarieta dimenzie m a stupňa k, tak jej objem je priamo úmerný k, konkrétne

$$\int_X \omega^m/m! = k\pi^m.$$

Dôkaz je celkom jednoduchý: priamym výpočtom sa overí, že vzťah platí, ak je X projektívny podpriestor (vtedy je $k = 1$), tým pádom platí, aj keď je zjednotením k projektívnych podpriestorov. No a všeobecné X stupňa k môžeme vždy zdeformovať na takéto zjednotenie (stačí meniť koeficienty polynomiálnych rovníc, ktoré zadávajú X); integrál uzavretej formy $\omega^m/m!$ sa pri tom nezmení.

Ak chcete jednoduché cvičenie, skúste dokázať, že jediné diferenciálne formy na $\mathbb{CP}^n$, ktoré sú invariantné voči všetkým unitárnym transformáciám, sú práve ω^m,

$0 \leq m \leq n$, a tým pádom (pozri vyššie na výpočet kohomológie sféry)

$$H^l_{dR}(\mathbb{CP}^n) \quad = \quad \begin{cases} \mathbb{R} & l \text{ párne a nie väčšie ako } 2n \\ 0 & \text{inak} \end{cases}.$$

PREDNÁŠKA 11

Symplektická a komplexná geometria 2 (MN)

V tejto kapitole sa budeme bližšie venovať podobnostiam a rozdielom medzi komplexnými a symplektickými varietami a ich geometriami, značná časť bude venovaná aj konkrétnym príkladom štvorrozmerných variet.

Komplexná štruktúra na vektorovom priestore V je automorfizmus $J : V \to V$, pre ktorý platí $J^2 = -\mathbb{1}$. Potom nie je ťažké nahliadnuť, že na (reálnom) vektorovom priestore V sa dá definovať násobenie komplexnými číslami pomocou J ako

$$\mathbb{C} \times V \to V : (s + \mathrm{i}t, v) \to sv + tJv.$$

Priestor komplexných šrtuktúr na vektorovom priestore V označme $\mathcal{J}(V)$, základným príkladom je štandardná komplexná štruktúra J_0 na $\mathbb{R}^{2n}$.

Ak (V, ω) je symplektický vektorový priestor, komplexná štruktúra $J \in \mathcal{J}(V)$ bude *kompatibilná so* symplektickou formou ω ak

$$\omega(Jv, Jw) = \omega(v, w)$$

pre všetky $v, w \in V$ a

$$\omega(v, Jv) > 0$$

pre všetky nenulové $v \in V$. Pre kompatibilnú komplexnú štruktúru môžeme navyše uvažovať bilineárnu formu

$$g_J(v, w) = \omega(v, Jw).$$

Cvičenie 11.1. *Nech (V, ω) je symplektický vektorový priestor a J je komplexná štruktúra na V. Ukážte, že nasledujúce je ekvivalentné:*
(i) J je kompatibilná s ω.
(ii) Bilineárna forma $g_J : V \times V \to \mathbb{R}$ definovaná ako

$$g_J(v, w) = \omega(v, w)$$

je symetrická, kladne definitná a invariantná vzhľadom na J.
(iii) Forma $H : V \times V \to \mathbb{C}$ definovaná ako

$$H(v, w) = \omega(v, Jw) + \mathrm{i}\omega(v, w)$$

je komplexne lineárna vo w, komplexne anti-lineárna vo v, spĺňa $H(w, v) = \overline{H(v, w)}$ a má kladne definitnú reálnu časť, teda ide o Hermitovský skalárny súčin na (V, J).

Dá sa ukázať, že priestor $\mathcal{J}(V, \omega)$ komplexných štruktúr kompatibilných so symplektickou formou ω je kontraktibilný.

TVRDENIE 11.2. *Priestor $\mathcal{J}(V, \omega)$ komplexných štruktúr kompatibilných so symplektickou formou ω je homeomorfný priestoru $\mathcal{P}$ symetrických kladne definitných symplektických matíc, teda je kontraktibilný.*

DÔKAZ. Vzhľadom na to, že v symplektickom priestore $(V\omega)$ existuje symplektická báza, môžeme predpokladať, že $V = \mathbb{R}^{2n}$ a $\omega = \omega_0$. Matica J typu $2n \times 2n$ bude reprezentovať kompatibilnú komplexnú štruktúru práve vtedy, ak

$$J^2 = -\mathbb{1}, \qquad J^T J_0 J = J_0, \qquad \langle v, -J_0 J v\rangle > 0 \quad \text{pre všetky } v \neq 0.$$

Z prvých dvoch rovností dostávame

$$(J_0J)^T = -J^TJ_0 = J^TJ_0J^2 = J_0J,$$

čiže matica $P = -J_0J$ je symetrická, kladne definitná a symplektická. Naopak, ľahko sa dá presvedčiť, že ak matica P má všetky tieto vlastnosti, bude $J = -J_0^{-1}P$ reprezentovať kompatibilnú komplexnú štruktúru. Potom už z cvičenia 4.9 vyplýva, že $\mathcal{J}(V,\omega)$ je kontraktibilný. □

Niekedy je vhodnejšie namiesto kompatibilných komplexných štruktúr použiť takzvané *ω-skrotené komplexné štruktúry*, od ktorých požadujeme iba to, aby spĺňali

$$\omega(v, Jv) > 0$$

pre každý nenulový vektor $v \in V$. Ich výhodou je to, že podmienka skrotenosti je otvorená a tým pádom generickejšia. To sa ukazuje výhodné najma pri analýze J-holomorfných kriviek a dôkazoch ich kompaktnosti.

Podobne, aj pre ω-skrotenú štruktúru môžeme definovať skalárny súčin daný symetrizujúcim predpisom

$$g_J(v,w) = \frac{1}{2}(\omega(v,Jw) + \omega(w,Jv)).$$

Všetky tieto fakty, ktoré sme si tu uviedli pre lineárne priestory, môžeme prirodzene zovšeobecniť pre symplektické variety a ich dotykové fibrácie, kde môžeme rovnako hovoriť o komplexných (resp. takmer komplexných) štruktúrach, ako aj o tom či budú kompatibilné alebo skrotené symplektickou štruktúrou.

Veľa príkladov kompaktných symplektických variet totiž pochádza z projektívnych komplexných variet, kde na variete X okrem symplektickej formy ω, pochádzajúcej zo Fubini–Studyho metriky na $\mathbb{CP}^n$ (pozri predchádzajúcu prednášku), máme aj komplexnú štruktúru, definovanú násobením komplexnou jednotkou i. Prirodzene, tieto variety budú obsahovať aj kompatibilnú metriku g_J. Komplexné variety (X, J, ω, g_J) vybavené symplektickou štruktúrou a kompatibilnou metrikou sa nazývajú *Kählerovské variety* a hrajú významnú úlohu v komplexnej geometrii.

1. Symplektomorfizmy a komplexné automorfizmy

Na nasledujúcich dvoch príkladoch poukážeme na podstatné rozdiely medzi symplektickou a komplexnou geometriou, kokrétne na to, ako voľne sa vieme pohybovať v rámci symplektickej, resp. komplexnej kategórie, a tiež na to, do akej miery môžeme resp. nemôžeme vykonávať lokálne zmeny týchto štruktúr.

Príklad 11.3. *Komplexné automorfizmy* $\mathbb{CP}^1$. Pod komplexným automorfizmom komplexnej variety rozumieme zobrazenie, ktoré je bijektívne a holomorfné v oboch smeroch. V prípade variety $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ je každý takýto automorfizmus popísaný meromorfnou funkciou $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ktorá nadobúda každú hodnotu práve raz.

Nie je ťažké nahliadnuť, že takýchto funkcií je pomerne málo. Keďže funkcia f je bijektívna, má práve jeden pól násobnosti 1, povedzme c, pričom môžeme predpokladať, že $c \neq \infty$. Potom funkcia $\frac{1}{c-z}f(z)$ bude opäť meromorfná, tentoraz bez pólov v $\mathbb{C}$, čiže to bude nejaká lineárna funkcia $\frac{1}{c-z}f(z) = az + b$. Tým pádom

$$f(z) = \frac{az+b}{c-z}, \qquad \text{kde } a, b, c \in \mathbb{C}.$$

Zoberúc do úvahy aj tie automorfizmy, ktoré zobrazujú pól na pól, t.j. $f(\infty) = \infty$, dostaneme celú grupu komplexných automorfizmov variety $\mathbb{CP}^1$ ako grupu

$$PGL(\mathbb{C}, 2) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \middle|\, ad - bc \neq 0,\ \alpha\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \sim \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \right\}.$$

Grupa $PGL(\mathbb{C}, 2)$ je šesťrozmerná reálna varieta, z čoho sa dá nahliadnuť, že komplexný automorfizmus variety $\mathbb{CP}^1$ je jednoznačne daný obrazmi troch rôznych bodov variety. To, okrem iného, znamená, že jediný komplexný automorfizmus, ktorý fixuje nejakú otvorenú množinu nutne musí byť identita.

Zjednodušene sa dá povedať, že podobné správanie je typické aj pre iné kompaktné komplexné variety. Grupy komplexných automorfizmov sú spravidla konečnorozmerné, podobne, priestory holomorfných zobrazení medzi komplexnými varietami zvyknú byť "relatívne malé" – konečnorozmerné. Prečo je to tak? Podmienka na to, aby nejaké zobrazenie bolo holomorfné, t.j. aby spĺňalo Cauchy–Riemannove rovnosti, je príliš silná. Napríklad, zaručuje existenciu analytického pokračovania, teda jednoznačného rozšírenia funkcie z malého okolia na celú varietu. To následne znamená, že aj malá lokálna zmena spravidla má globálne následky.

Príklad 11.4. *Symplektomorfizmy* $\mathbb{CP}^1$. Ako sme videli v kapitole 8, symplektomorfizmy variety $\mathbb{CP}^1$ v blízkosti identity sú generované ako toky symplektických vektorových polí. Ak začneme s Hamiltoniánom H, ktorý je konštantný mimo malého okolia $O(p)$ bodu $p \in \mathbb{CP}^1$, predpisom

$$\iota_{X_H}\omega = dH$$

dostaneme vektorové pole X_H, ktoré je zjavne symplektické a nulové mimo $O(p)$. To znamená, že symplektomorfizmus generovaný tokom X_H bude konštantný mimo $O(p)$ a netriviálny iba v okolí $O(p)$.

Existencia veľkého počtu takýchto lokálne posobiacich symplektomorfizmov poukazuje na mohutnosť grupy symplektomorfizmov symplektickej variety, ktorá je spravidla nekonečne rozmerná. Z tohto pohľadu sa grupa symplektomorfizmov podobá grupe difeomorfizmov.

2. Takmer komplexné štruktúry a Chernove triedy

Komplexnú varietu X, môžeme popísať pomocou atlasu $\{U_\alpha, \alpha\}$ lokálnych komplexných súradnicových sústav $\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$. Nech pre nejaký bod $p \in U_\alpha$ máme $\alpha(p) = z$, potom v komplexnom vektorovom priestore $T_z\mathbb{C}^n$ máme definované násobenie komplexnou jednotkou i, ktoré sa jednoznačne prenesie aj do $\mathrm{i} : T_pX \to T_pX$, teda zobrazenie $d\alpha : T_pX \to T_z\mathbb{C}^n$ je komplexné lineárne. Aby nám nevznikol problém v priesečníku dvoch lokálnych súradníc $U_\alpha \cap U_\beta$, musia sa tu násobenia komplexnou jednotkou zhodovať, teda lineárne zobrazenie $d(\beta \circ \alpha^{-1})(z)$ musí patriť do $GL(n, \mathbb{C})$. To ale znamená, že $\beta \circ \alpha^{-1}$ je *holomorfné* zobrazenie z $\mathbb{C}^n$ do $\mathbb{C}^n$.

Na symplektickej variete (M, ω) môžeme definovať *takmer komplexnú štruktúru* J, ako zobrazenie $J : TM \to TM$, ktoré spĺňa $J^2 = -I$. Čiže v každom fíbri T_pM predstavuje J (iba lokálne!) komplexnú štruktúru vektorového priestoru T_pM.

To, čím sa líši takmer komplexná štruktúra J na variete M od komplexnej štruktúry komplexnej variety X, je ich integrovateľnosť, teda podmienka, aby zobrazenie prechodu medzi súradnicovými sústavami $\beta \circ \alpha^{-1}$ bolo holomorfné.

Vo všeobecnosti, takmer komplexných štruktúr na variete M existuje pomerne veľké množstvo, ale iba niektoré z nich budú integrovateľné. Výnimkou je prípad $2n = 2$, kde je každá takmer komplexná štruktúra na (reálnej) dvojrozmernej ploche Σ^2 integrovateľná, a ide teda o komplexnú krivku.

Na tomto mieste sme na prednáške veľmi rýchlo zopakovali pár faktov o kohomologickom okruhu a Chernových triedach. V okruhu diferenciálnych foriem $\Omega^*(M) = \bigcup_0^n \Omega^k(M)$ máme dobre definované násobenie, ktoré sa správa "rozumne" aj vzhľadom na operátor vonkajšej derivácie $d : \Omega^k \to \Omega^{k+1}$. To nám umožňuje zaviesť násobenie aj na kohomologické triedy, čím sa z aditívnej grupy $H^*(M) = \bigcup_1^n H^k(M)$ stáva okruh.

Jeden zo základných výsledkov algebraickej topológie, Poincarého veta o dualite, nám na druhej strane dáva do súvisu homologické a kohomologické triedy pre orientovateľná kompaktné variety.

TVRDENIE 11.5 (Poincarého dualita). *Nech M je n-rozmerná orientovateľná kompaktná varieta, potom pre každé k existuje izomorfizmus*

$$PD : H_k(X;\mathbb{Z}) \simeq H^{n-k}(X;\mathbb{Z}).$$

Ďalšou vecou, ktorú budeme potrebovať pre naše nasledujúce výpočty je teória Chernových tried. Pre vektorové fibrácie

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \xi \\ & & \downarrow \\ & & B \end{array}$$

kde V je komplexný vektorový priestor, možeme definovať tzv. *Chernove triedy.* Ide o priradenie, kde každej triede izomorfizmov vektorových fibrácií priradí jej Chernovu triedu $c(\xi) \in H^*(B,\mathbb{Z})$ s nasledujúcimi vlastnosťami:

1) Chernova trieda $c(\xi)$ sa dá zapísať ako $c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + c_2(\xi) + \cdots + c_n(\xi)$, kde $c_i(\xi) \in H^{2i}(B,\mathbb{Z})$ a $c_i(\xi) = 0$ pre každé $i > \dim(\xi)$.

2) Ak ξ a η sú izomorfné ako vektorové fibrácie nad bázou B, potom $c(\xi) = c(\eta)$, a ak $f : B_1 \to B_2$ je zobrazenie báz, máme tzv. prirodzenosť pre Chernove triedy $f^*(c(\xi)) = c(f^*(\xi))$.

3) Pre dve vektorové fibrácie ξ a η nad bázou B platí $c(\xi \oplus \eta) = c(\xi)c(\eta)$ v zmysle násobenia v okruhu $H^*(B;\mathbb{Z})$.

4) Pre kanonickú fibráciu λ nad $S^2 = \mathbb{CP}^1$ máme $c(\lambda) = 1+h$, kde h je generátor grupy $H^2(S^2;\mathbb{Z})$.

Navyše pre jednorozmerné (komplexné) fibrácie L platí nasledovné: ak D je priesečník nulového a generického rezu fibrácie L, potom pre jej Chernovu triedu máme $c_1(L) = PD(D) = PD([\text{množina nulových bodov generického rezu } L])$.

3. $T\mathbb{CP}^3$ a jej podvariety

V tejto časti ilustrujeme vyššie spomenuté metódy vo výpočtoch pre niektoré štvorrozmerné variety. Cieľom bude výpočet Bettiho čísel a Chernových tried pre podvariety X_d v projektívnom priestore $\mathbb{CP}^3$, ktoré sú dané ako

$$X_d = \left\{ [z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{CP}^3 \middle| \sum_{i=0}^{3} z_j^d = 0 \right\}.$$

Dá sa ukázať, že každý z priestorov X_d bude hladkou komplexnou podvarietou $\mathbb{CP}^3$ (veta o implicitnej funkcii), ako aj to, že budú jednoducho súvislé, t.j. $\pi_1(X_d) = \{1\}$ (Lefschetzova veta o hyperrovinách).

Na začiatok si zopakujme základné fakty o komplexných projektívnych priestoroch. Pre priestory $\mathbb{CP}^2$ a $\mathbb{CP}^3$ máme

$$H^0(\mathbb{CP}^2) = \mathbb{Z}, \qquad H^2(\mathbb{CP}^2) = \mathbb{Z}, \qquad H^4(\mathbb{CP}^2) = \mathbb{Z},$$

$$H^0(\mathbb{CP}^3) = \mathbb{Z}, \qquad H^2(\mathbb{CP}^3) = \mathbb{Z}, \qquad H^4(\mathbb{CP}^3) = \mathbb{Z}, \qquad H^6(\mathbb{CP}^3) = \mathbb{Z},$$

pričom generátory týchto grúp sú 1, h, h^2, resp. 1, h, h^2, h^3 a v nepárnych dimenziách sú kohomologické grupy nulové.

Pre výpočet Chernových tried komplexných projektívnych priestorov $\mathbb{CP}^2$ a $\mathbb{CP}^3$ potrebujeme použiť nasledujúci trik. Priestor $\mathbb{CP}^3$ je priestor komplexných priamok v $\mathbb{C}^4$ prechádzajúcich cez počiatok. Teda každému bodu $l \in \mathbb{CP}^3$ zodpovedá

1-rozmerný komplexný vektorový podpriestor v $\mathbb{C}^4$. K nemu potom existuje duálny priestor $H_l = \{l^* \mid l^* \text{ je lineárny funkcionál na } l\}$. Takýto priestor H_l môžeme zavesiť do každého bodu v $\mathbb{CP}^3$, čím dostaneme vektorovú fibráciu H – *kanonickú vektorovú fibráciu.*

LEMMA 11.6. *Celková Chernova trieda kanonickej fibrácie H nad $\mathbb{CP}^3$ je $c(H) = 1 + h$.*

DÔKAZ. Ak zoberieme ľubovoľný vektor $w \in \mathbb{C}^4$, potom zo skalárneho súčinu $\langle w, v\rangle$ dostávame predpisom

$$\langle w, \cdot\rangle : v \mapsto \langle w, v\rangle$$

lineárny funkcionál v $\mathbb{C}^{4^*}$, jeho reštrikcia na l bude patriť do H_l. Tým pádom pre každé $w \in \mathbb{C}^4$ dostávame nejaký rez kanonickej vektorovej fibrácie H.

Pre výpočet Chernovej triedy fibrácie H nám stačí nájsť nulové body takejto sekcie. Dostávame

$$\langle w, \cdot\rangle \text{ je nulový na } l \;\Leftrightarrow\; l \perp w,$$

teda práve pre $l \in w^\perp \cong \mathbb{C}^3$. Z toho máme, že $\langle w, \cdot\rangle|_l$ bude nulové na nejakej kópii $\mathbb{CP}^2$ v $\mathbb{CP}^3$. Preto

$$c_1(H) = PD([\mathbb{CP}^2]) = h \in H^2(\mathbb{CP}^3).$$

a celková Chernova trieda bude $c(H) = 1 + h$. □

LEMMA 11.7. *Celková Chernova trieda dotykovej fibrácie $T^*\mathbb{CP}^3$ je $c(T^*\mathbb{CP}^3) = (1 + h)^4$.*

DÔKAZ. Využijeme to, že vektorové fibrácie $T\mathbb{CP}^3 \oplus \varepsilon$ a $H^4 = H \oplus H \oplus H \oplus H$ sú izomorfné, kde pod ε v tomto prípade rozumieme triviálnu jednorozmernú fibráciu nad $\mathbb{CP}^3$. Pre fibrácie $T\mathbb{CP}^3$ a ε totiž platí

$$T\mathbb{CP}^3 \cong \mathrm{Hom}(l, l^\perp) \qquad \text{a} \qquad \varepsilon \cong \mathrm{Hom}(l, l),$$

z čoho dostávame rovnosti

$$T\mathbb{CP}^3 \oplus \varepsilon \cong \mathrm{Hom}(l, l^\perp \oplus l) \cong \mathrm{Hom}(l, \mathbb{C}^4) = \bigoplus^4 \mathrm{Hom}(l, \mathbb{C}) = H \oplus H \oplus H \oplus H.$$

Z toho už vyplýva, že $c(T\mathbb{CP}^3) = (1 + h)^4 = 1 + 4h + 6h^2 + 4h^3 \in H^*(\mathbb{CP}^3)$. □

Pre výpočet charakteristických tried plôch $X_d \hookrightarrow \mathbb{CP}^3$ využijeme rozklad fibrácie $T\mathbb{CP}^3|_X$ na dotykovú fibráciu TX a normálovú fibraciu ν_X. Využitím prirodzenosti Chernových tried a homomorfizmu kohomológií $i^* : H^*(\mathbb{CP}^3) \to H^*(X_d)$ indukovaného vnorením $i : X_d \hookrightarrow \mathbb{CP}^3$ dostávame

$$\begin{aligned} c(T\mathbb{CP}^3|_X) = (1 + i^*h)^4 = 1 + 4i^*h + 6i^*h^2 = c(TX)c(\nu_X) = \\ = (1 + c_1(TX) + c_2(TX))(1 + di^*h). \end{aligned}$$

Z toho dopočítame

$$c_1(TX) = (4 - d)i^*h \qquad \text{a} \qquad c_2(TX) = (6 - 4d + d^2)i^*h^2.$$

V tomto výpočte sme použili fakt, že $c(\nu_X) = 1+di^*h$, ktorý plynie z nasledujúceho pozorovania.

Nech $\Sigma \subset X$ je, komplexná krivka stupňa k, t.j. dvojrozmerná (reálna) podvarieta v X, ktorej vnorenie $i(\Sigma)$ do $\mathbb{CP}^3$ reprezentuje homologickú triedu $[i(\Sigma)] = kPD(h^2) \in H_2(\mathbb{CP}^3)$. Keďže vnorená varieta $i(X)$ reprezentuje homologickú triedu $dPD(h) \in H_4(\mathbb{CP}^3)$ ich priesečníkové číslo bude $X \cdot \Sigma = [i(X)] \cdot [i(\Sigma)] = dPD(h) \cdot kPD(h^2) = dk$.

Na druhej strane, rovnaké priesečníkové číslo dostaneme, ak namiesto variety X zvolíme obraz ľubovoľného rezu $s : X \to \nu_X$ v ν_X. Lenže to je presne počet nulových bodov rezu s obmedzeného na podvarietu $\Sigma \subset X$. Dostávame teda $\langle c_1(\nu_X), [\Sigma]\rangle =$

$dk = d\langle i^*h, [\Sigma]\rangle$. Toto platí pre všetky $\Sigma \subset X$, a preto z duality vyplýva, že $c_1(\nu_X) = di^*h$.

Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že výpočty charakteristických tried podvariet X_d nám samy o sebe nevypovedajú veľa o ich topológii. Napriek tomu však z nich môžeme získať viacero údajov o ich homologických a kohomologických grupách. Najvyššia Chernova trieda totiž určuje Eulerovu charakteristiku variety na základe nasledujúceho vzťahu

$$\langle c_2(TX), [X]\rangle = \chi = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 = 2 + b_2.$$

Podobne, pre takzvanú *priesečníkovú formu* $Q_X : H_2(X;\mathbb{Z}) \times H_2(X;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$, ktorú môžeme zaviesť na homologickej grupe $H_2(X)$ ako

$$Q_X([N],[N']) = [N]\cdot[N'] = \int_X PD(N)PD(N'),$$

platí Hirzebruchova veta o signatúre.

Tvrdenie 11.8 (Hirzebruchova veta o signatúre). *Pre orientovateľnú štvorrozmernú varietu X platí*

$$\mathrm{Sign}(Q_X) = \frac{1}{3}\langle c_1(TX)^2 - 2c_2(TX), [X]\rangle.$$

Aby sme mohli určiť Eulerovu charakteristiku a signatúru priesečníkovej formy pre variety X_d, zostáva nám určiť $\langle i^*h^2, [X]\rangle$. Poincarého duál generátora $h^2 \in H^4(\mathbb{CP}^3)$ je trieda $[\mathbb{CP}^1]$ zodpovedajúca priamke, ktorá sa s varietou X_d pretína práve v d bodoch, počítajúc s násobnosťou. Tým pádom

$$\langle i^*h^2, [X]\rangle = d.$$

Z toho už ľahko odvodíme, že

$$b_2(X_d) = d(6-4d+d^2) - 2 \qquad \text{a} \qquad \mathrm{Sign}(Q_{X_d}) = \frac{1}{3}(4-d^2)(d).$$

Bettiho číslo b_2 môžeme vyjadriť ako $b_2 = b^+ + b^-$, kde b^+, resp. b^-, označuje dimenziu kladne, resp. záporne, definitnej časti priesečníkovej formy Q_X. Nakoniec dostávame

$$b^+(X_d) = \frac{1}{3}(d^3 - 6d^2 + 11d - 3), \qquad \text{a} \qquad b^-(X_d) = \frac{1}{3}(2d^3 - 6d^2 + 7d - 3).$$

Je zaujímavé vymenovať variety X_d pre malé hodnoty parametra d. Pre $d = 1, 2$ a 3 postupne dostávame:

$$X_1 = \mathbb{CP}^2, \qquad X_2 = S^2 \times S^2, \qquad X_3 = \mathbb{CP}^2\#6\overline{\mathbb{CP}}^2$$

Pre $d = 4$ máme $c_1(TX_4) = 0$, teda X_4 je kompaktná, súvislá a jednoducho súvislá štvorrozmerná Kählerovská varieta, ktorej prvá Chernova trieda je nulová. Všetky štvorrozmerné variety s týmito vlastnosťami sú navzájom difeomorfné a nazývajú sa *Kummerove plochy*, resp. *K3-plochy*. Z topologického hľadiska ide o varietu $\mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}}^2$, s druhým Bettiho číslom 22.

Pre hodnoty $d \geq 5$ sú variety X_d takzvanými *plochami všeobecného typu*. Pre nepárne $d \geq 5$ majú variety X_d a $X'_d = b^+\mathbb{CP}^2\#b^-\overline{\mathbb{CP}}^2$ rovnaké priesečníkové formy, a tým pádom sú homeomorfné. Dá sa však ukázať, že X_d a X'_d majú rôzne Donaldsonove invarianty, a teda nie sú navzájom difeomorfné.

Príklad 11.9. *Formula adjunkcie.* Nech X je Kählerovská plocha (varieta reálnej dimenzie 4) a $\Sigma \subset X$ nech je nejaká vnorená súvislá komplexná krivka (reálnej dimenzie 2). Potom prvá Chernova trieda jej normálovej fibrácie ν_Σ bude Poincarého duál k množine nulových bodov generického rezu ν_Σ, pričom tento rez môžeme vnímať ako paralelnú, tranzverzálne vnorenú kópiu plochy Σ. Takto dostávame takzvané *samopriesekové číslo* plochy Σ. Vďaka rozkladu $T\Sigma = T_\Sigma X \oplus \nu_\Sigma$ dostávame pre rod $g = g(\Sigma)$ plochy Σ *formulu adjunkcie*

$$2g(\Sigma) - 2 = \Sigma \cdot \Sigma - \langle c_1(TX), [\Sigma] \rangle.$$

Využívame tu totiž nasledujúce

$$\langle c_1(T\Sigma), [\Sigma] \rangle = \langle e(\Sigma), [\Sigma] \rangle = \chi(\Sigma),$$

$$\langle c_1(\nu_\Sigma), [\Sigma] \rangle = \Sigma \cdot \Sigma, \qquad \text{a} \quad c_1(T_\Sigma X) = c_1(T\Sigma) + c_1(\nu_\Sigma).$$

Príkladom použitia tejto formuly môže byť hyperplocha

$$\Sigma_d = \left\{ [z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^2 \mid z_0^d + z_1^d + z_2^d = 0 \right\}$$

stupňa d v $\mathbb{CP}^2$. Toto bude súvislá hladko vnorená plocha, ktorej rod bude daný rovnosťou

$$2g(\Sigma_d) - 2 = d^2 - 3d.$$

Totiž, podobne ako v leme 11.7, máme $T\mathbb{CP}^2 + \varepsilon \cong H^3$, a teda $c_1(T\mathbb{CP}^2) = 3h$. Z toho plynie $\langle c_1(T\mathbb{CP}^2, [\Sigma_d]) = 3d$. Nakoľko Σ_d je stupňa d, máme $[\Sigma_d] = dh$ a $\Sigma_d \cdot \Sigma_d = d^2$. Zvyšok už vyplýva z formuly adjunkcie.

PREDNÁŠKA 12

Symplektická redukcia (MF)

- Momentové zobrazenie
- Redukovaný fázový priestor
- Elementárny príklad: Pohyb v zvislom gravitačnom poli

Za symetrie sú zákony zachovania. Tie sa dajú využiť na zjednodušenie úlohy a zjednodušená úloha sa dá často dotiahnuť do konca. Symplektická redukcia formalizuje túto myšlienku. Poďme teda formalizovať.

Momentové zobrazenie. Nech (M, ω, R_g) je symplektická varieta, na ktorej je dané pravé pôsobenie R_g Lieovej grupy G, pričom toto pôsobenie zachováva symplektickú štruktúru:

$$R_g : M \to M \qquad\qquad R_g^*\, \omega = \omega$$

S každým takýmto pôsobením sa automaticky dostáva (pre každé $X \in \mathcal{G}$) do hry istá *uzavretá* forma, konkrétne 1-forma $\alpha_X \equiv i_{\xi_X}\omega$.

▼ Infinitezimálnou verziou podmienky $R_g^*\, \omega = \omega$ je rovnica $\mathcal{L}_{\xi_X}\omega = 0$. Cartanova identita ale dáva $0 = \mathcal{L}_{\xi_X}\omega = i_{\xi_X}d\omega + di_{\xi_X}\omega = d(i_{\xi_X}\omega)$. ▲

Ľahko sa overí, že forma α_X závisí od X lineárne a voči akcii R_g je „typu Ad" :

(46) $$R_g^*\alpha_X = \alpha_{\mathrm{Ad}_g X} \qquad \text{takže infinitezimálne} \qquad \mathcal{L}_{\xi_X}\alpha_Y = \alpha_{[X,Y]}$$

Najdôležitejší je prípad, keď formy α_X sú v skutočnosti nielen uzavreté, ale aj exaktné, čiže keď existuje *globálny* potenciál $P_X \in \mathcal{F}(M)$, $\alpha_X = dP_X$. Vtedy sa pôsobenie volá *globálne hamiltonovské*, lebo pole ξ_X je vtedy hamiltonovské pole generované funkciou P_X

(47) $$i_{\xi_X}\omega = -dP_X \qquad \text{takže} \qquad \xi_X = \zeta_{P_X} \qquad \text{alebo tiež} \qquad \xi_X f = \{P_X, f\}$$

Predpokladajme, že takýto potenciál existuje. Vzniká otázka, či sa vyššie spomínané vlastnosti prenášajú z 1-formy α_X aj na potenciál (funkciu) P_X. Jednoduchá analýza ukazuje, že linearita funkcie P_X voči $X \in \mathcal{G}$ sa (využitím vôle v potenciáli) dá vždy zabezpečiť. To umožňuje zakódovať ju do ekvivalentného objektu, do zobrazenia

$$P : M \to \mathcal{G}^* \qquad\qquad \langle P(x), X\rangle := P_X(x),\ x \in M$$

čo sa dá chápať aj ako funkcia na M s hodnotami v $\mathcal{G}^*$, t.j. $P \in \Omega^0(M, \mathcal{G}^*)$.

Trochu náročnejšia analýza odhalí, že s Ad-správaním potenciálu (t.j. so vzťahom $\mathcal{L}_{\xi_X}P_Y = P_{[X,Y]}$) je to zložitejšie a že sa nie vždy dá dosiahnuť. Zároveň sa pritom odhalí, že toto Ad-správanie úzko súvisí s platnosťou vzťahu

(48) $$\{P_X, P_Y\} = P_{[X,Y]}$$

t.j. s faktom, že predpis $X \mapsto P_X$ je *homomorfizmus* Lieových algebier alebo tiež s *ekvivariantnosťou* zobrazenia P, t.j. s vlastnosťou

(49) $$P \circ R_g = \mathrm{Ad}_g^* \circ P$$

Pre nás bude najzaujímavejší prípad, keď sa funkcia $\beta(X, Y)$ dá odstrániť, t.j. keď platia vzťahy (48) a (49). Zobrazenie $P : M \to \mathcal{G}^*$ sa vtedy volá *momentové zobrazenie*, jemu prislúchajúce zobrazenie $\tilde{P} : \mathcal{G} \to \mathcal{A}(M)$, $X \mapsto P_X$ je *komomentové* *zobrazenie* a samotné hamiltonovské pôsobenie R_g grupy G na (M, ω) sa vtedy volá *poissonovské* pôsobenie. (Takéto „slušné" pôsobenie vzniká napríklad *zdvihom ľubovoľného* pôsobenia z bázy do totálneho priestoru kodotykovej fibrácie (pozri (42)) alebo v prípade *koadjungovaných orbít*, ktoré sme spomínali v predchádzajúcej prednáške.)

Ak Lieova grupa G zachováva *aj hamiltonián*, $R_g^* H = H$ (ide teda o symetriu celej *hamiltonovskej sústavy* (M, ω, H)), tak funkcia P_X je pre každé $X \in \mathcal{G}$ *zachovávajúca sa veličina*. Máme teda toľko (nezávislých) zachovávajúcich sa veličín, koľko je rozmer grupy symetrie (= rozmer Lieovej algebry $\mathcal{G}$; ak E_i je báza $\mathcal{G}$, tak $P_X = X^i P_i$ a *všetky* funkcie $P_i = P_{E_i}$ sa zachovávajú).

Redukovaný fázový priestor. Často sa stane, že na prvý pohľad zložitá úloha sa výrazne zjednoduší prechodom do ťažiskovej sústavy. Je to preto, lebo vypadnú *nezaujímavé* stupne voľnosti spojené s pohybom ťažiska. To čo zostane má samozrejme menej stupňov voľnosti (keďže nejaké vypadli) a teda tento krok zmenšil (zredukoval) fázový priestor. Tento jednoduchý nápad je podstatou techniky redukcie fázového priestoru pomocou symetrie. Tu si opíšeme všeobecnú schému redukcie a zvyšok tejto a celú ďalšiu prednášku ju budeme už len ilustrovať na konkrétnych príkladoch.

Budeme predpokladať, že na $2n$-rozmernej symplektickej variete (M, ω) máme *voľné* a *poissonovské* pôsobenie R_g Lieovej grupy G. Zodpovedá jej teda ekvivariantné momentové zobrazenie $P : M \to \mathcal{G}^*$. Vieme, že ak by bola G aj symetriou hamiltoniánu, tak by sa zložky P_i momentového zobrazenia P zachovávali, takže celá trajektória by ležala iba v *časti* celkového fázového priestoru M, a to tej, ktorú P zobrazuje do jedného bodu $p \in \mathcal{G}^*$. Fixujme preto bod $p \in \mathcal{G}^*$ a ako M_p označme jeho vzor

$$M_p := \{x \in M \mid P(x) = p\}$$

Je to podvarieta rozmeru $2n - \dim G$, ktorá je definovaná implicitne rovnicami

$$P_i(x) = p_i \equiv \text{ konšt.}, \quad i = 1, \dots, \dim G$$

Podvarieta M_p nie je invariantná voči pôsobeniu celej grupy G; ľahko sa overí, že

$$R_g M_p = M_{\mathrm{Ad}\,_g^* p}$$

Odtiaľ vidíme, že M_p je invariantná iba voči podgrupe $G_p \subset G$, stabilizátoru bodu p (voči pôsobeniu Ad^* na $\mathcal{G}^*$). Ohraničenie pôsobenia R_g na G_p už teda necháva M_p (ako množinu) na mieste

$$R_g M_p = M_p \qquad\qquad g \in G_p$$

Pôsobenie grupy G_p rozkladá varietu M_p na orbity $\mathcal{O}_x$. Keďže G_p pôsobí na M_p *voľne* (platilo to pre celú grupu G), tak všetky orbity sú ako variety rovnaké (difeomorfné). Ukazuje sa, že výsledným redukovaným fázovým priestorom je faktorvarieta $\hat{M}_p := M_p / G_p$ (priestor orbít). Nato aby sme to dokázali, potrebujeme na nej nájsť symplektickú formu. Dá sa k nej dopracovať nasledovne.

Pôvodná symplektická forma ω žije na M. Uvažujme jej *ohraničenie* $\omega|_{M_p}$ na podvarietu M_p. Označme ho $\tilde{\omega}$. Táto 2-forma má dve dôležité vlastnosti, ktoré z nej umožnia o chvíľu vyrobiť *symplektickú* formu $\hat{\omega}$ na $\hat{M}_p$. Po prvé, je G_p-invariantná, t.j.

$$R_g^* \tilde{\omega} = \tilde{\omega} \qquad g \in G_p$$

Okrem toho je navyše aj *horizontálna*, t.j. anuluje ju (čo i len jediný) „vertikálny" argument, kde pod vertikálnym vektorom chápeme vektor, ktorý sa dotýka orbity. Dá sa však ukázať (odporúčame si to premyslieť), že formy na M_p, ktoré sú horizontálne a súčasne G_p-invariantné, sú vo vzájomne jednoznačnom vzťahu s formami na $\hat{M}_p$. (Takéto formy na M_p sú pull-backom nejakej formy na $\hat{M}_p$ voči prirodzenej projekcii na faktorvarietu, $\pi : M_p \to \hat{M}_p$, $x \mapsto \hat{x} \equiv [x]$.)

To ale znamená, že na $\hat{M}_p$ žije jednoznačná 2-forma $\hat{\omega}$, ktorá zodpovedá forme $\tilde{\omega}$ na M_p. Práve táto 2-forma je hľadanou symplektickou formou. (Previerka, že to tak je, je užitočným cvičením ponechaným na čitateľa.)

Z pôvodnej symplektickej variety (M, ω) sa teda získala nová (menšia) symplektická varieta $(\hat{M}_p, \hat{\omega})$. Hovorí sa jej *redukovaná symplektická varieta* a v mechanickom kontexte tiež *redukovaný fázový priestor*. Povie sa tiež, že vznikla z (M, ω) *redukciou grupou* G.

A čo ak máme na začiatku celú hamiltonovskú sústavu a hamiltonián je tiež invariantný voči grupe G? Redukuje sa symetriou celá hamiltonovská sústava? Jednoducho sa nahliadne, *že áno*. Dá sa presvedčiť, že pôvodné hamiltonovské pole sa prirodzene projektuje na redukovaný fázový priestor a že je na ňom opäť hamiltonovským poľom, pričom jeho hamiltonián $\hat{H}$ je ohraničením pôvodného hamiltoniánu H na $\hat{M}_p$. Redukciou grupou G tak vzniká z pôvodnej hamiltonovskej sústavy (M, ω, H) *redukovaná hamiltonovská sústava* $(\hat{M}_p, \hat{\omega}, \hat{H})$, ktorá je menšia ako pôvodná.

Jednoduchý príklad: Pohyb v zvislom gravitačnom poli. Uvažujme ako hamiltonovskú sústavu obyčajný fázový priestor jedného hmotného bodu $T^*\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R}^6[\mathbf{r}, \mathbf{p}]$ so symplektickou formou $\omega = d\mathbf{p}. \wedge d\mathbf{r}$ a s hamiltoniánom $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m + mgz$. Ide teda o pohyb tohoto bodu v zvislom homogénnom gravitačnom poli. Intuitívne je zrejmé, že translácie vo vodorovných smeroch $(x, y, z) \mapsto (x + a_x, y + a_y, z)$ sú jej symetriou. Formálnym vyjadrením týchto pocitov je to, že *zdvih* translácií do fázového priestoru

$$(x, y, z, p_x, p_y, p_z) \mapsto (x + a_x, y + a_y, z, p_x, p_y, p_z)$$

zachováva symplektickú formu aj hamiltonián. Keďže toto pôsobenie Lieovej grupy $G = (\mathbb{R}^2, +)$ vo fázovom priestore je voľné, sú naplnené všetky zákonom predpísané podmienky na začatie redukčného konania.

Začína sa momentovým zobrazením. Pre $X = X^1 E_1 + X^1 E_1$ z Lieovej algebry dvojrozmernej translačnej grupy má fundamentálne pole tvar $\xi_X = X^1 \partial_x + X^2 \partial_y$, takže

$$i_{\xi_X} \omega = -(X^1 dp_x + X^2 dp_x) = -d(X^1 p_x + X^2 p_x) \equiv -dP_X$$

Momentové zobrazenie preto vyzerá

$$P : (x, y, z, p_x, p_y, p_z) \mapsto p_x E^1 + p_y E^2 \sim (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2 \sim \mathcal{G}^*$$

Vzor bodu $(p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2 \sim \mathcal{G}^*$ sú všetky body (x, y, z, p_x, p_y, p_z) také, že p_x a p_y sú fixné, takže $M_p \sim \mathbb{R}^4[x, y, z, p_z]$. Translačná grupa je komutatívna, preto Ad aj Ad* pôsobí triválne a teda G_p je celá translačná grupa. Body na jej orbitách sú ekvivalentné v zmysle $(x, y, z, p_z) \sim (x+a_x, y+a_y, z, p_z)$; ak podľa tejto ekvivalencie faktorizujeme, dostaneme ako priestor orbít $\hat{M}_p \sim \mathbb{R}^2[z, p_z]$. (Projekcia $\pi : M_p \to \hat{M}_p$ tu vyzerá $(x, y, z, p_z) \mapsto (z, p_z)$.) Ohraničenie ω na $M_p \sim \mathbb{R}^4[x, y, z, p_z]$ je $\tilde{\omega} = dp_z \wedge dz$ a táto forma je pull-backom formy $\hat{\omega} = dp_z \wedge dz$ z $\hat{M}_p$. Napokon ohraničenie H vedie na $\hat{H}(z, p_z) = p_z^2/2m + mgz$ (plus aditívna konštanta, ktorú nepíšeme). Záver teda je, že redukovaná hamiltonovská sústava tu je $\mathbb{R}^2[z, p]$ so symplektickou formou $\hat{\omega} = dp \wedge dz$ a s hamiltoniánom $H(z, p) = p^2/2m + mgz$; ide teda o pohyb hmotného bodu v homogénnom gravitačnom poli, pri ktorom sa *ignorujú* (nezaujímavé = vodorovné) *stupne voľnosti* (x, y) a prežije len zaujímavá (= zvislá, jednorozmerná) časť úlohy.

PREDNÁŠKA 13

Symplektická redukcia 2 (MF)

- Pr.1: Problém dvoch telies - redukcia pomocou grupy translácií
- Pr.2: Pohyb v centrálnom poli - redukcia pomocou grupy rotácií
- Pr.3: Redukcia $\mathbb{C}^{n+1}$ na $\mathbb{C}P^n$ pomocou grupy $U(1)$

Problém dvoch telies a translácie. Uvažujeme pohyb dvoch hmotných bodov v E^3. Ich dynamika sa opisuje hamiltoniánom

$$H(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \mathbf{p}_1^2/2m_1 + \mathbf{p}_2^2/2m_2 + U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$$

ktorý je funkciou vo *fázovom* priestore $\mathbb{R}^{12}[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2] \equiv T^*\mathbb{R}^6$, kde $\mathbb{R}^6[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$ je *konfiguračný* priestor sústavy. V tomto konfiguračnom priestore pôsobí (trojrozmerná) *translačná* grupa $\mathbb{R}^3[\mathbf{a}]$ štandardným predpisom

$$\hat{R}_{\mathbf{a}} : (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \mapsto (\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}, \mathbf{r}_2 + \mathbf{a})$$

Jej zdvih $R_{\mathbf{a}} := T^*\hat{R}_{-\mathbf{a}}$ na $T^*\mathbb{R}^6[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$ vyzerá

$$R_{\mathbf{a}} : (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \mapsto (\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}, \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$$

Ak prejdeme v konfiguračnom priestore namiesto $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ k súradniciam ťažiska $\mathbf{R}$ a relatívnemu vektoru $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, dostaneme

$$\omega = d\mathbf{p}_1. \wedge d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{p}_2. \wedge d\mathbf{r}_2 = d\mathbf{P}. \wedge d\mathbf{R} + d\mathbf{p}. \wedge d\mathbf{r}$$

Pôsobenie $R_{\mathbf{a}}$ vo fázovom priestore v týchto súradniciach vyzerá

$$R_{\mathbf{a}} : (\mathbf{R}, \mathbf{r}, \mathbf{P}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{R} + \mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{P}, \mathbf{p})$$

Je *voľné* a symplektická forma ω je voči nemu invariantná. Hamiltonián vychádza

$$H(\mathbf{R}, \mathbf{r}, \mathbf{P}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + U(|\mathbf{r}|) \qquad M \equiv m_1 + m_2 \quad \mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

a je zjavne *invariantný*. Môže sa preto začať redukcia.

Podobne ako v minulom príklade nahliadneme, že momentové zobrazenie sa dá napísať ako

$$P : (\mathbf{R}, \mathbf{r}, \mathbf{P}, \mathbf{p}) \mapsto \mathbf{P}$$

takže varieta M_p zo všeobecnej konštrukcie tu zodpovedá časti fázového priestoru s *fixnou* hodnotou *celkovej hybnosti ťažiska* $\mathbf{P}$; dá sa teda stotožniť s $\mathbb{R}^9[\mathbf{R}, \mathbf{r}, \mathbf{p}]$. Grupa G_p je tu (opäť) *celá* translačná grupa $\mathbb{R}^3[\mathbf{a}]$, takže výsledná varieta $\hat{M}_p$ sa dá stotožniť s $\mathbb{R}^6[\mathbf{r}, \mathbf{p}]$. Ohraničenie symplektickej formy ω na podvarietu M_p tu vyzerá $\tilde{\omega} = d\mathbf{p}. \wedge d\mathbf{r}$ (pozor, žije na $\mathbb{R}^9[\mathbf{R}, \mathbf{r}, \mathbf{p}]$). Táto 2-forma je naozaj horizontálna a $\mathbb{R}^3[\mathbf{a}]$-invariantná. Zápis „redukovanej” symplektickej formy $\hat{\omega}$ vyzerá rovnako ako pre $\tilde{\omega}$, ale $\hat{\omega}$ žije už len na $\mathbb{R}^6[\mathbf{r}, \mathbf{p}]$. *Translačná* symetria pôvodnej úlohy *o dvoch* telesách nás teda priviedla (symplektickou redukciou) k jednoduchšej úlohe *o jednom* (fiktívnom) telese. Redukovaným fázovým priestorom je už len $\mathbb{R}^6[\mathbf{r}, \mathbf{p}]$ (fázový priestor bodu s „polohovým vektorom” $\mathbf{r}$) so symplektickou formou $\hat{\omega} = d\mathbf{p}. \wedge d\mathbf{r}$. V tomto fázovom priestore generuje dynamiku hamiltonián

$$\hat{H} = \hat{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2\mu + U(r)$$

ktorý zodpovedá pohybu telesa v *centrálnom poli*. Vznikne z pôvodného hamiltoniánu $H(\mathbf{R},\mathbf{r},\mathbf{P},\mathbf{p})$ takto: Najprv sa v ňom položí $\mathbf{P} =$ konšt. za ohraničenie na M_p. (Vzniknutá nepodstatná aditívna konštanta sa škrtne.) Výsledok nezávisí od $\mathbf{R}$ (vďaka invariantnosti) a preto prechod na $\hat{M}_p$ (zlikvidovanie $\mathbf{R}$) sa už formálne nijako neprejaví.

Pohyb v centrálnom poli a rotácie. Úloha o jednom telese v centrálnom poli, ktorá zostala, sa dá redukovať ďalej, lebo má ešte dodatočnú *rotačnú* symetriu.

Rotačná grupa štandardne pôsobí v konfiguračnom priestore $M = E^3$ jedného hmotného bodu, $\mathbf{r} \mapsto A\mathbf{r}$, $A \in SO(3)$. Ak l_j je báza Lieovej algebry $so(3)$, tak príslušné generátory ξ_X na M a ich zdvihy do *fázového priestoru* $T^*M[\mathbf{r},\mathbf{p}]$ sú

$$\xi_{l_j} = -\epsilon_{jik}x_i\partial_k \qquad \tilde{\xi}_{l_j} = -\epsilon_{jik}\{x_i\frac{\partial}{\partial x_k} + p_i\frac{\partial}{\partial p_k}\}$$

Funkcie P_X vychádzajú

$$P_{l_j}(\mathbf{r},\mathbf{p}) = -\epsilon_{jkl}x_kp_l \equiv -(\mathbf{r}\times\mathbf{p})_j \equiv -L_j$$

Pre momentové zobrazenie odtiaľ štandardne dostaneme

$$(\mathbf{r},\mathbf{p}) \mapsto -\mathbf{L}(\mathbf{r},\mathbf{p}) \equiv -\mathbf{r}\times\mathbf{p}$$

takže M_p je tu podvarieta $M_{\mathbf{L}} \subset \mathbb{R}^6[\mathbf{r},\mathbf{p}]$ bodov s konštantnou hodnotou vektora *momentu hybnosti* $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r}\times\mathbf{p} = \mathbf{konšt}$. Skalárne násobenie vektormi $\mathbf{r}$ a $\mathbf{p}$ dáva $\mathbf{L}.\mathbf{r} = 0 = \mathbf{L}.\mathbf{p}$, takže ak vyberieme os z v smere $\mathbf{L}$, tak vektory $\mathbf{r}$ aj $\mathbf{p}$ budú „v rovine xy". V *polárnych* súradniciach v týchto rovinách teda máme zatiaľ súradnice $(r,\varphi,p_r,p_\varphi)$ (čo sú súradnice na $T^*\mathbb{R}^2[r,\varphi]$). Podmienka na fixovanie *dĺžky* vektora $\mathbf{L}$ dáva navyše $L_z = xp_y - yp_x = p_\varphi = L =$ konšt., takže ako $M_{\mathbf{L}}$ zostáva súradnicovo už len $\mathbb{R}^3(r,\varphi,p_r)$. Ako G_p fungujú rotácie, ktoré nemenia $\mathbf{L}$, t.j. rotácie len okolo osi z ($SO(2) \subset SO(3)$). Ekvivalencia na orbitách tohoto pôsobenia je $(r,\varphi,p_r) \sim (r,\varphi+a,p_r)$ takže faktorizácia dáva $\hat{M}_p \equiv \hat{M}_{\mathbf{L}} \cong \mathbb{R}^2(r,p_r)$. Symplektická forma v pôvodnom $\mathbb{R}^6$ bola $\omega = dp_r\wedge dr + dp_\vartheta\wedge d\vartheta + dp_\varphi\wedge d\varphi$. Jej ohraničenie na $M_{\mathbf{L}}$ je $\tilde{\omega} = dp_r\wedge dr$, čo je invariantné a horizontálne voči generátoru ∂_φ grupy $SO(2)$. Na $\hat{M}_{\mathbf{L}}$ je teda $\hat{\omega} = dp_r\wedge dr$. Ohraničenie hamiltoniánu vyzerá ($p_\vartheta \mapsto 0$, $p_\varphi \mapsto L \equiv$ konšt.)

$$H(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + U(r) \equiv \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\vartheta^2}{2\mu r^2\sin^2\vartheta} + \frac{p_\varphi^2}{2\mu r^2} + U(r) \mapsto \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r)$$

Vyšlo teda, že symplektická redukcia rotačnou grupou dáva pre problém pohybu telesa v centrálnom poli $U(r)$ dynamiku „radiálneho" stupňa voľnosti r, t.j. dynamiku vo fázovom priestore so súradnicami (r,p_r), symplektickou formou $\hat{\omega} = dp_r\wedge dr$ a hamiltoniánom

$$\hat{H}(r,p_r) = \frac{p_r^2}{2\mu} + U_{ef}(r) \qquad U_{ef}(r) := U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$
$$\equiv \textit{efektívna potenciálna energia}$$

Redukcia $\mathbb{C}^{n+1}$ na $\mathbb{C}P^n$ a $U(1)$ symetria. Začína sa z $\mathbb{C}^{n+1}$ so súradnicami $(z^0,z^1,\dots,z^n)$ a kanonickej symplektickej formy (pozri (41))

$$\begin{aligned}\omega &= (-i/2)d\bar{z}^a\wedge dz^a\\ &\equiv (-i/2)[d\bar{z}^0\wedge dz^0 + d\bar{z}^k\wedge dz^k]\\ &= (-i/2)[d\bar{z}^0\wedge dz^0 + d\bar{z}^1\wedge dz^1 + \dots + d\bar{z}^n\wedge dz^n] \end{aligned} \tag{50}$$

Je zjavne invariantná voči prirodzenému pôsobeniu grupy $U(1)$ v $\mathbb{C}^{n+1}$

$$z^a \mapsto e^{it}z^a,\ \bar{z}^a \mapsto e^{-it}\bar{z}^a \qquad \Rightarrow \qquad \omega\mapsto\omega \tag{51}$$

s generátorom

$$\xi_{E_1} = v = i(z\partial - \bar{z}\bar{\partial}) \equiv i(z^a\partial_a - \bar{z}^a\bar{\partial}_a)$$

▼ Toto je fundamentálne pole $\xi_{E_1} = v$, ktoré zodpovedá *bázovému* prvku $E_1 = i$ Lieovej algebry $\mathcal{G} = u(1)$. Pre všeobecný prvok $X = X^1 E_1 \in \mathcal{G}$ bude $\xi_X = X^1 \xi_{E_1} = X^1 v$. ▲

Na redukciu sa ešte zídu aj iné (lokálne) súradnice v $\mathbb{C}^{n+1}$, súradnice $(r, \varphi, w^k, \bar{w}^k)$, ktoré zavedieme takto: všeobecný bod z leží na sfére polomeru r, takže v oblasti, kde $z^0 \neq 0$, platí

$$r^2 = |z|^2 \equiv \bar{z}^a z^a = |z^0|^2 + |z^1|^2 + \cdots + |z^n|^2 = |z^0|^2(1 + \bar{w}w)$$
$$z^k = z^0 w^k, \quad \bar{w}w := \bar{w}^k w^k = |w^1|^2 + \cdots + |w^n|^2$$

To dáva pre z^0 a z^k parametrizáciu

$$z^0 = z^0(r, \varphi, w^k, \bar{w}^k) = re^{i\varphi}/(1 + \bar{w}w)^{1/2} \tag{52}$$

$$z^k = z^k(r, \varphi, w^k, \bar{w}^k) = re^{i\varphi}w^k/(1 + \bar{w}w)^{1/2} \tag{53}$$

Všimneme si, že pôsobenie (51) grupy $U(1)$ vyzerá v týchto súradniciach veľmi jednoducho

$$(r, \varphi, w^k, \bar{w}^k) \mapsto (r, \varphi + t, w^k, \bar{w}^k) \qquad \text{takže} \qquad v = \partial_\varphi$$

Ideme symplekticky redukovať. Podľa všeobecnej schémy vytvoríme 1-formu α_X a presvedčíme sa, že je exaktná:

$$\alpha_X = -i_{\xi_X}\omega = dP_X \qquad P_X(z, \bar{z}) = X^1 P_{E_1}(z, \bar{z}) = X^1(1/2)|z|^2$$

Nesklamala - naozaj *je* exaktná. Pomocou jej potenciálu P_X môžeme teda zaviesť momentové zobrazenie

$$P : \mathbb{C}^{n+1}[z, \bar{z}] \to (u(1))^* \qquad P(z, \bar{z}) = P_1(z, \bar{z})E^1 = \frac{1}{2}|z|^2 E^1 \tag{54}$$

Teraz môžeme prikročiť k ďalšiemu kroku receptu: vyrobiť varietu M_p ako vzor fixného bodu p v $\mathcal{G}^* = (u(1))^*$. Pohľad na konkrétny tvar zobrazenia (54) ukazuje, že touto varietou je tu ***sféra*** (fixného) polomeru $R > 0$:

$$M = \mathbb{C}^{n+1} \qquad M_p = S_R^{2n+1} \equiv \{z \in \mathbb{C}^{n+1} |\ |z|^2 = R^2\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$$

Mimoriadne jednoducho vyzerá zápis sféry S_R^{2n+1} v súradniciach $(r, \varphi, w^k, \bar{w}^k)$; podmienka znie

$$S_R^{2n+1} \ : \ r = R \qquad \Rightarrow \qquad S_R^{2n+1}[\varphi, w^k, \bar{w}^k]$$

čiže na sfére prežijú už len súradnice $(\varphi, w^k, \bar{w}^k)$. Grupa G_p (zo všeobecného receptu), ktorá necháva na pokoji M_p, je tu *celá* grupa $G = U(1)$, lebo reprezentácia Ad^* pôsobí triviálne. Voči tejto grupe treba teraz $M_p \equiv S_R^{2n+1}$ *prefaktorizovať*, čím sa získa varieta $\hat{M}_p = \mathbb{C}P^n$. Ohraničenie pôsobenia grupy $G = U(1)$ na $M_p \equiv S_R^{2n+1}$ súradnicovo vyzerá

$$(\varphi, w^k, \bar{w}^k) \mapsto (\varphi + t, w^k, \bar{w}^k)$$

takže na faktorvariete $\hat{M}_p = \mathbb{C}P^n$, priestore orbít, zostanú už len súradnice $(w^k, \bar{w}^k)$

$$\hat{M}_p = \mathbb{C}P^n[w^k, \bar{w}^k]$$

To je dobre, lebo $(w^k, \bar{w}^k)$ sa štandardne používajú ako súradnice na $\mathbb{C}P^n$.

Práve na tejto variete má žiť výsledná („redukovaná") symplektická forma $\hat{\omega}$. Chceme získať jej súradnicové vyjadrenie. Podľa všeobecnej schémy treba najprv urobiť *ohraničenie* $\tilde{\omega}$ symplektickej formy ω na podvarietu $M_p = S_R^{2n+1}$. To by v súradniciach $(r, \varphi, w^k, \bar{w}^k)$ prakticky znamenalo položiť vo vyjadrení ω všade $r = R$, a teda $dr = 0$; súradnica r teda opúšťa scénu a ďalej zostanú už len súradnice $(\varphi, w^k, \bar{w}^k)$. Zo všeobecnej teórie sa ďalej vie, že táto forma $\tilde{\omega}$ je voči pôsobeniu $G_p = U(1)$ *invariantná* a navyše že je *horizontálna* (vynuluje sa po dosadení čo i len jediného argumentu typu ξ_X). Invariantnosť v súradniciach $(\varphi, w^k, \bar{w}^k)$ znamená, že jej komponenty neobsahujú premennú φ. Horizontalita sa prejaví tak, že tam nikde nebude figurovať bázová forma $d\varphi$. Spolu vidíme, že aj súradnica φ sa porúča, takže $\tilde{\omega}$ sa vyjadruje už len cez $(w^k, \bar{w}^k)$. Z explicitného súradnicového vyjadrenia prirodzenej projekcie

(55) všeobecne $\quad \pi : M_p \to \hat{M}_p$

(56) t.j. tu $\quad \pi : S_R^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n \qquad z \mapsto [z]$

(57) resp. $\quad (\varphi, w^k, \bar{w}^k) \mapsto (w^k, \bar{w}^k)$

vidno, že na $\hat{M}_p = \mathbb{C}P^n$ naozaj existuje forma $\hat{\omega}$ taká, že $\tilde{\omega} = \pi^* \hat{\omega}$ pričom formy $\tilde{\omega}$ a $\hat{\omega}$ majú ***úplne rovnaké*** súradnicové vyjadrenie. Takže ak vyrátame súradnicový tvar formy $\tilde{\omega}$, na získanie $\hat{\omega}$ už nebude čo počítať. Vyrátať súradnicový tvar formy $\tilde{\omega}$ nie je ťažké.

V princípe treba prepočítať diferenciály v (50) pomocou (52) a (53). Samozrejme, keďže diferenciály dr a $d\varphi$ v konečnom výraze nebudú, nemusíme ich brať vážne ***ani tu*** a môžeme ich pokojne ***ignorovať*** už v medzivýpočtoch. T.j. napríklad

$$dz^0(r, \varphi, w^k, \bar{w}^k) = d\{re^{i\varphi}/(1 + \bar{w}w)^{1/2}\} = \dots = z^0 \left(\frac{dr}{r} + id\varphi - \frac{1}{2} \frac{d(\bar{w}w)}{1 + \bar{w}w} \right)$$

ale stačí si z toho nechať

$$dz^0 = z^0 \left(-\frac{1}{2} \frac{d(\bar{w}w)}{1 + \bar{w}w} \right) \equiv z^0 \beta \qquad \beta := -\frac{1}{2} \frac{\bar{w}^k dw^k + w^k d\bar{w}^k}{1 + \bar{w}w}$$

Podobne vyjde (po vyškrtnutí zbytočných členov)

$$dz^k = z^0 (dw^k + w^k \beta)$$

Teraz stačí tieto vyjadrenia dosadiť do (50) (a položiť $r = R$ v (52) a (53)) a vyjde

$$\tilde{\omega} = -\frac{i}{2} \, h_{\bar{k}j} \, d\bar{w}^k \wedge dw^j \qquad h_{\bar{k}j} = R^2 \, \frac{(1 + \bar{w}w)\delta^{kj} - w^k \bar{w}^j}{(1 + \bar{w}w)^2}$$

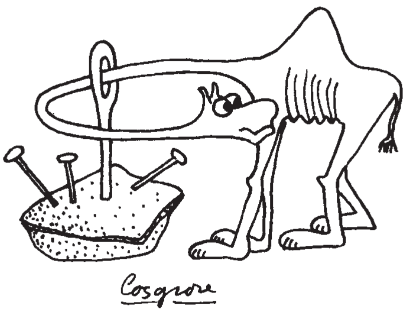
Zistili sme teda, že $\mathbb{C}P^n$ má prirodzenú symplektickú štruktúru, ktorá sa dá získať (napríklad) symplektickou redukciou z $\mathbb{C}^{n+1}$ pomocou symetrie $U(1)$. Ukazuje sa, že skutočnosť je ešte zaujímavejšia a bohatšia: $\mathbb{C}P^n$ je (podobne ako $\mathbb{C}^{n+1}$) dokonca *Kählerovou* varietou, [1] pričom kählerovská štruktúra je daná hermitovskou formou

$$\hat{h} = \hat{g} + i\hat{\omega} = \, h_{\bar{k}j} \, d\bar{w}^k \otimes dw^j \qquad h_{\bar{k}j} = R^2 \, \frac{(1 + \bar{w}w)\delta^{kj} - w^k \bar{w}^j}{(1 + \bar{w}w)^2}$$

[1] O Kählerových varietách sa hovorí v iných prednáškach tejto Zimnej školy.

PREDNÁŠKA 14

Symplektická ťava (MN)



Prejde symplektická ťava cez ucho ihly?

V kapitole 11 sme si ukázali, že pre symplektickú varietu má trieda symplektomorfizmov podobne bohatú štruktúru ako trieda difeomorfných transformácií. Navyše, každý symplektomorfizmus zachováva okrem symplektickej formy ω aj formu objemu $\bigwedge^n \omega$. V tejto prednáške poukážeme na jeden zásadný rozdiel medzi symplektomorfizmami a difeomorfizmami zachovávajúcimi objem. Príklad so symplektickou ťavou pochádza od V. I. Arnoľda, dôkaz nemožnosti pretiahnutia symplektickej ťavy cez ucho ihly je od M. Gromova, ktorý v ňom využil teóriu J-holomorfných kriviek.

Symplektickú ťavu bude reprezentovať jednotková guľa $B^{2n}(1)$ v štandardnom lineárnom symplektickom priestore $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Valec $Z(r) = B^2(r) \times \mathbb{R}^{2n-2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} | x_1^2 + y_1^2 \leq r\}$, so zúžením štandardnej symplektickej formy ω_0, bude reprezentovať ucho ihly. Potom platí nasledujúca veta o "nezmačknuteľnosti".

VETA 14.1 (O nezmačknuteľnosti, Gromov 1985). *Ak existuje symplektomorfizmus, ktorý zobrazuje jednotkovú guľu $B^{2n}(1)$ v $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ do valca $Z(r)$, potom $r \geq 1$.*

Nie je ťažké nahliadnuť, že pre objemzachovávajúce difeomorfizmy nemáme, okrem dimenzie 2, žiadne podobné obmedzenie. Jednotkovú guľu vieme totiž zobraziť do ľubovoľne úzkeho valca, pričom zmačknutie v niektorých smeroch vieme kompenzovať natiahnutím v inom. V kapitole 4 sme si ukázali, že ku každej vlastnej hodnote λ lineárneho symplektomorfizmu Ψ existuje druhá vlastná hodnota λ^{-1}. Gromovova veta o nezmačknuteľnosti nám, okrem iného, hovorí ako sú tieto dve vlastné hodnoty a ich vlastné priestory navzájom pevne zviazané.

Skúsme sa najprv pozrieť na lineárny prípad. Pod *afinným symplektomorfizmom* budeme rozumieť zobrazenie $\Psi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ tvaru $\Psi(z) = \Phi(z) + z_0$, kde $\Phi(z) \in Sp(2n)$ je symplektická matica.

TVRDENIE 14.2. *Ak Ψ je afinný symplektomorfizmus zobrazujúci $B^{2n}(1)$ do $Z(r)$, potom $r \geq 1$.*

DÔKAZ. Nech $\Psi(z) = \Phi(z) + z_0$ a $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$ sú stĺpce matice Φ^T zodpovedajúce súradniciam x_1, y_1 a nech a, b sú príslušné zložky vektora z_0. Platia teda rovnosti

$$\Phi z = \begin{pmatrix} -\,u^T - \\ -\,v^T - \\ \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ z \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^T z \\ v^T z \\ \cdots \end{pmatrix},$$

$$\Phi^T x_1 = \begin{pmatrix} | & | & \cdot \\ u & v & \cdot \\ | & | & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ u \\ | \end{pmatrix}, \qquad \Phi^T y_1 = \begin{pmatrix} | & | & \cdot \\ u & v & \cdot \\ | & | & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ v \\ | \end{pmatrix}.$$

Obe matice, Φ aj Φ^T, sú symplektické a platí $\omega_0(u,v) = \omega_0(\Psi^T x_1, \Psi^T y_1) = \omega_0(x_1, y_1) = 1$. Podmienka zobrazenia jednotkovej gule $B^{2n}(1)$ do valca $Z(r)$ sa dá prepísať ako

$$\sup_{|z|=1} (\langle u, z\rangle + a)^2 + (\langle v, z\rangle + b)^2 \leq r^2.$$

Keďže $1 = \omega_0(u, v) \leq |u||v|$, aspoň jeden z vektorov u, v má dĺžku aspoň 1, nech je to vektor u. Zvoľme $z = \pm\frac{u}{|u|}$ a dosadením za z dostaneme

$$r^2 \geq (\langle u, z\rangle + a)^2 = (\pm|u| + a)^2,$$

čo pre jedno zo znamienok dá $1 \leq r$. □

Táto vlastnosť afinných symplektomorfizmov vedie k nasledujúcemu pojmu: pod *(lineárnou) symplektickou šírkou* ľubovoľnej podmnožiny $A \subset \mathbb{R}^{2n}$ rozumieme číslo

$$w_L(A) = \sup\{\pi r^2 | \Phi(B^{2n}(r)) \subset A \text{ pre nejaké } \Phi \in ASp(2n, \mathbb{R})\},$$

resp. pre nelineárny prípad

$$w(U, \omega) = \sup\{\pi r^2 | B^{2n}(r) \text{ sa dá symplekticky zobraziť do } U\}.$$

Tvrdenie o lineárnej nezmačknuteľnosti nám pre symplektickú šírku dáva

$$w_L(B^2n(r)) = w_L(Z(r)) = \pi r^2.$$

Takto definovaná symplektická šírka navyše spĺňa nasledujúce axiómy *symplektickej kapacity.*

(*monotónnosť*) ak existuje symplektické vnorenie $\Phi : (U, \omega) \to (U', \omega')$, potom $c(U, \omega) \leq c(U', \omega')$,

(*konformná invariancia*) pre ľubovoľné $\lambda > 0$ platí $c(U, \lambda\omega) = \lambda^2(U, \omega)$,

(*netriviálnosť*)

$$0 < c(B^{2n}(1), \omega_0) = c(Z(1), \omega_0) < \infty.$$

Platí nasledujúce tvrdenie, charakterizujúce symplektomorfizmy pomocou symplektickej kapacity, dokážeme iba jeho lineárnu verziu.

TVRDENIE 14.3. *(Lokálny) orientáciu–zachovávajúci difeomorfizmus Φ na symplektickej variete $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ je symplektomorfizmom vtedy a len vtedy, ak zachováva kapacitu na všetkých otvorených podmnožinách v $\mathbb{R}^{2n}$, t.j. $c(\Phi(U)) = c(U)$ pre všetky otvorené U.*

TVRDENIE 14.4. *Lineárne zobrazenie $L : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, ktoré zachováva kapacitu elipsoidov je symplektické alebo antisymplektické, t.j. $L^*(\omega_0) = \pm\omega_0$.*

DÔKAZ. Ak zobrazenie L nie je symplektické ani antisymplektické, tak takým nebude ani L^T. Tým pádom existujú vektory v, w, pre ktoré

$$\omega_0(v, w) \neq \pm\omega_0(L^T v, L^T w).$$

Keďže táto nerovnosť je otvorená relácia, t.j. platí v nejakom otvorenom okolí vektorov v a w, môžeme predpokladať, že obe strany sú nenulové. Prípadným preškálovaním alebo zámenou L^T za $(L^T)^{-1}$ môžeme zabezpečiť, aby platilo

$$0 < \lambda^2 = |\omega_0(L^T v, L^T w)| < \omega_0(v, w) = 1.$$

Skonštruujme nové symplektické bázy v $\mathbb{R}^{2n}$:

$$u_1 = v, \quad v_1 = w, \quad u_2 = \ldots,$$

$$u_1' = \frac{L^T v}{\lambda}, \quad v_1' = \pm\frac{L^T w}{\lambda}, \quad u_2' = \ldots.$$

Nech A, resp. A' sú lineárne symplektomorfizmy zobrazujúce $e_1, e_2, \ldots, e_{2n}$ do $u_1, v_1, \ldots$, resp. $u_1', v_1', \ldots$. Potom zložené zobrazenie $C = (A')^{-1} L^T A$ zobrazuje vektory e_1, e_2 na

$$e_1 \xmapsto{A} u_1 = v \xmapsto{L^T} L^T v = \lambda u_1' \xmapsto{(A')^{-1}} \lambda e_1,$$

$$e_2 \xmapsto{A} v_1 = w \xmapsto{L^T} L^T w = \lambda v_1' \xmapsto{(A')^{-1}} \lambda e_2,$$

čiže matice C a C^T majú tvar

$$C = \left(\begin{array}{cc|ccc} \lambda & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda & * & \dots & * \\ \hline 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & * & \dots & * \end{array}\right), \qquad C^T = \left(\begin{array}{cc|ccc} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \hline * & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \dots & * \end{array}\right).$$

Potom zobrazenie C^T zobrazuje jednotkovú sféru $B^{2n}(1)$ do valca $Z(\lambda)$ s polomerom $\lambda < 1$. Zároveň ale platí, že zobrazenia A, L a $(A')^{-1}$ zachovávajú kapacitu, rovnako by ju malo zachovávať aj ich zloženie $C^T = A^T L(A')^{-1}$. Čím sa dostávame k sporu. $\square$

Úplný dôkaz Gromovovej vety o nezmačknuteľnosti výrazne presahuje rámec týchto prednášok, a preto tu uvedieme iba jeho náčrt, vynechajúc práve jeho ťažšie časti týkajúce sa J-holomorfných kriviek.

Náčrt dôkazu Vety o nezmačknuteľnosti. Nech $\Phi : B^{2n}(1) \to Z(r)$ je symplektické vnorenie jednotkovej gule do valca s polomerom r. Predpokladajme, že obraz $\Phi(B^{2n}(1))$ leží v nejakej kompaktnej podmnožine $B^2(r) \times K \subset Z(r)$. Tú môžeme považovať za podmnožinu kompaktnej variety $(S^2 \times T^{2n-2}, \Omega)$, kde symplektická forma $\Omega = \sigma \oplus \kappa\omega_0$ pozostáva zo symplektickej 2-formy σ na sfére S^2 s celkovou plochou $\pi r^2 + \varepsilon$ a $\kappa\omega_0$ je vhodný násobok štandardnej symplektickej formy na T^{2n-2}.

Okrem toho, nech J_0 je štandardná (takmer) komplexná štruktúra na $\mathbb{R}^{2n}$ a J nech je Ω-kompatibilná takmer komplexná štruktúra na $S^2 \times T^{2n-2}$, ktorá súhlasí s $\Phi_*(J_0)$ na obraze gule $B^{2n}(1)$. Takáto takmer komplexná štruktúra J ide vždy skonštruovať rozšírením $\Phi_*(J_0)$ aj mimo obraz $\Phi(B^{2n}(1))$, nakoľko lokálne je priestor Ω-kompatibilných komplexných štruktúr kontraktibilný.

Teória J-holomorfných kriviek na variete $S^2 \times T^{2n-2}$, o ktorej sa zmienime viac v kapitole 15, zaručuje existenciu aspoň jednej J-holomorfnej krivky reprezentujúcej homologickú triedu $A = [S^2 \times \mathrm{pt}]$, prechádzajúcej cez každý bod variety $S^2 \times T^{2n-2}$. Nech C je J-holomorfná krivka prechádzajúca cez bod $\Phi(0)$, a nech S je jedna z komponent vzoru $\Phi^{-1}(C)$, prechádzajúca cez bod 0. Potom S je J_0-holomorfná krivka v $B^{2n}(1)$, pričom každý jej prienik s kompaktnou podmnožinou gule je kompaktný. Takáto krivka sa nazýva *vlastná* alebo *regulárna*. Nakoľko J_0 je štandardná komplexná štruktúra na $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, o krivke S vieme toho pomerne veľa.

Vieme, že holomorfná krivka S bude minimálnou plochou v zmysle štandardnej metriky g_0. Lenže taká plocha je práve ľubovoľný plochý disk prechádzajúci cez počiatok, ktorého plocha je $\pi 1^2$. Dostávame teda nerovnosti

$$\pi \leq \mathrm{Plocha}_{g_0}(S) = \int_S \omega_0 = \int_{\Phi(S)} \Omega \leq \int_C \Omega = \int_{S^2 \times \mathrm{pt}} \Omega = \pi r^2 + \varepsilon.$$

Nakoľko táto nerovnosť platí pre všetky ε dostávame $r \geq 1$.

"$\square$"

PREDNÁŠKA 15

J-holomorfné krivky (MN)

V kapitole 14 sme sa stretli so zobrazeniami zachovávajúcimi takmer komplexné štruktúry, konkrétne sme videli zobrazenie $u : (S^2, j) \to (S^2 \times T^{2n-2}, J)$, pre ktoré platilo

$$J \circ du = du \circ j.$$

Ďalšou úpravou predchádzajucej rovnosti dostávame

$$J \circ du \circ j = du \circ (-\mathbb{1}),$$

$$J \circ du \circ j + du = 0.$$

Poznamenajme, že riemannovskú sféru S^2 je niekedy užitočné reprezentovať komplexnou projektívnou priamkou $\mathbb{CP}^1$, ktorá má štandardnú komplexnú aj symplektickú štruktúru. Vyššievedené rovnosti však majú lokálnu povahu a nezávisia od globálnych vlastností Riemannovskej plochy, a preto podobnú argumentáciu môžeme použiť aj pre zobrazenia z Riemannovských plôch vyššieho rádu $u : \Sigma \to M$. Pre ne sa rovnakým spôsobom dostaneme k diferenciálnemu operátoru $\bar{\partial}_J$, definovanému ako $\bar{\partial}_J(u) = \frac{1}{2}(J \circ du \circ j + du)$. Tento operátor hrá v modernej matematike významnú úlohu, a práve jeho výskyt v kontexte symplektickej geometrie nám umožnuje využiť zásadné výsledky z oblasti parciálnych diferenciálnych rovníc.

1. Cauchy–Riemannove rovnice

Ak si lokálne súradnice na S^2 označíme ako $z = s + it$, komplexná štruktúra na jej dotykovej fibrácii bude daná vzťahmi $j(\frac{\partial}{\partial s}) = \frac{\partial}{\partial t}$ a $j(\frac{\partial}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial s}$. Podobne na M môžeme mať lokálne súradnice $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$. Potom operátor $\bar{\partial}_J$ priraďuje zobrazeniu $u : S^2 \to M$ zobrazenie $\bar{\partial}_J(u) = \frac{1}{2}(J \circ du \circ j + du)$, t.j. zobrazenie z TS^2 do TM, čo v lokálnych súradniciach môžeme zapísať ako

$$J \circ du \circ j : \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \xmapsto{\ j\ } \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial s} \end{pmatrix} \xmapsto{\ du\ } \begin{pmatrix} \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ -\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x_i} \end{pmatrix} \xmapsto{\ J\ } \begin{pmatrix} J(u) \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ -J(u) \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x_i} \end{pmatrix},$$

$$du : \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \xmapsto{\ du\ } \begin{pmatrix} \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} \end{pmatrix}.$$

Spojením dostaneme

$$\bar{\partial}_J(u) : \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} J(u)\partial_t u + \partial_s u \\ -J(u)\partial_s u + \partial_t u \end{pmatrix},$$

čo sa dá "učene" vyjadriť aj ako

$$\bar{\partial}_J(u) = \frac{1}{2}\big(J(u)\partial_t u + \partial_s u\big)ds + \frac{1}{2}\big(-J(u)\partial_s u + \partial_t u\big)dt.$$

Na $\bar{\partial}_J(u)$ sa tu môžeme pozerať ako na 1-formu z $\Omega^{0,1}(S^2, u^*TM)$, teda priestoru foriem čakajúcich na jeden vektor $(z, v) \in TS^2$ a dávajúcich výsledok (z, v'), kde $v' \in T_{u(z)}M$.

Na to, aby $\bar{\partial}_J(u)$ bolo nulové, potrebujeme aby boli splnené nelineárne Cauchy–Riemannove rovnice

$$J(u)\partial_t u + \partial_s u = 0 \qquad \text{a} \qquad -J(u)\partial_s u + \partial_t u = 0,$$

ktoré sú, tak isto ako v lineárnom prípade, iba násobkami jedna druhej. Podobne ako sa v komplexnej analýze dostaneme od Cauchy–Riemannových rovníc k harmonickým funkciám, môžeme obe rovnice ešte raz parciálne zderivovať

$$0 = \partial_s\big(J(u)\partial_t u\big) + \partial_s\partial_s u = J(u)\partial_s\partial_t u + \big(\partial_s J(u)\big)\partial_t u + (\partial_s)^2 u$$

$$0 = \partial_t\big(-J(u)\partial_s u\big) + \partial_t\partial_t u = -J(u)\partial_t\partial_s u - \big(\partial_t J(u)\big)\partial_s u + (\partial_t)^2 u$$

a sčítaním dostať rovnicu pre laplacián u

$$\Delta u = (\partial_s)^2 u + (\partial_t)^2 u = \big(\partial_t J(u)\big)\partial_s u - \big(\partial_s J(u)\big)\partial_t u.$$

Rovnica, ktorú sme takto dostali, je kvázi-lineárna eliptická parciálna rovnica rádu 2. Teória eliptických parciálnych rovníc ponúka viacero silných nástrojov, ktoré nám dávajú lepšiu predstavu o priestoroch jej riešení. Špeciálne ide o výsledky týkajúce sa regularity riešení, ktoré nám umožňujú ukázať, že vhodné slabé riešenia sú v skutočnosti regulárne, či hladké. Na druhej strane, pre výsledky týkajúce sa existencie slabých riešení môžeme použit metódy z funkcionálnej analýzy, ktoré nám dajú informáciu o očakávanej dimenzii priestoru riešení.

2. Minimálne plochy

Ďalšia priama spojitosť s harmonickou analýzou spočíva v tom, že tak ako klasické harmonické funkcie minimalizujú plochu, podobne ju budú minimalizovať aj J-holomorfné krivky.

Nech takmer komplexná štruktúra J na variete M je kompatibilná so symplektickou formou ω, a teda platí

$$\omega(u,v) = \omega(Ju, Jv), \qquad \text{a} \qquad \omega(u, Ju) > 0 \quad \text{pre } u \neq 0.$$

K dvojici symplektickej formy ω a takmer komplexnej štruktúry J existuje práve jedna s nimi kompatibilná metrika spĺňajúca $g_J(u,v) = \omega(u, Jv)$. Následne môžeme definovať na TM normu $|\cdot|_J$ ako $|\cdot|_J^2 = g_J(\cdot,\cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$.

Okrem diferenciálneho operátora $\bar\partial_J$ môžeme analogicky definovať diferenciálny operátor ∂_J ako $\partial_J(u) = \frac{1}{2}(du - J\circ du\circ j)$. Potom dostávame rozklad diferenciálu $du = \partial_J(u) + \bar\partial_J(u)$, ktorý nám pomôže odlíšiť J-holomorfné zobrazenia, t.j. tie, pre ktoré je zložka $\bar\partial_J(u)$ nulová. Podobne ako diferenciál $\bar\partial_J(u)$, aj $\partial_J(u)$ a du sú 1-formami z $\Omega^1(S^2, u*TM)$.

Definujme *energiu* zobrazenia $u : S^2 \to M$ ako L^2 normu 1-formy du:

$$E(u) := \frac{1}{2}\int_{S^2} |du|_J^2 dS,$$

kde normu $|\cdot|_J$ pre lineárne zobrazenie $L = du(z) : T_zS^2 \to T_{u(z)}M$ definujeme predpisom

$$|L|_j := |\xi|^{-1}\sqrt{|L(\xi)|_J^2 + |L(j\xi)|_J^2}$$

pre nenulové $\xi \in T_zS^2$.

Cvičenie 15.1. Ukážte, že pre (reálne) lineárne zobrazenie $L : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^{2n}$ je výraz

$$|L| = |\xi|^{-1}\sqrt{|L(\xi)|^2 + |L(j\xi)|^2}$$

nezávislý od výberu $\xi \in \mathbb{C} - \{0\}$, kde $|\cdot|$ označuje Euklidovskú normu na $\mathbb{R}^{2n}$. Ak navyše identifikujeme $\mathbb{R}^{2n}$ s $\mathbb{C}^n$ a L je komplexné lineárne zobrazenie, potom platí $|L| = \sqrt{2}|L(1)|$. Ukážte tiež, že $|L(1)|$ je operátorová norma lineárneho zobrazenia L (v zmysle $|L| = \sup_{|z|=1}|L(z)|$), a že hodnotu $|L|$ dostaneme ak odmocníme súčet štvorcov zložiek reálnej matice reprezentujúcej L pre ortonormálne bázy. Pre holomorfnú funkciu $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ukážte, že $|d\phi(z)| = \sqrt{2}|\phi'(z)|$, kde $\phi'(z) \in \mathbb{C}$ označuje jej komplexnú deriváciu.

Pre súradnicový systém $z = s + it$ na S^2 a zobrazenie $u : S^2 \to M$ potom platí

$$|du|_J^2 dS = \big(|\partial_s u|_J^2 + |\partial_t u|_J^2\big) ds \wedge dt = \big(|\partial_s u + J\partial_t u|_J^2 - 2g_J(\partial_s u, J\partial_t u)\big) ds \wedge dt =$$
$$= 2|\bar{\partial}_J(u)|_J^2 dS + 2\omega(\partial_s u, \partial_t u) ds \wedge dt = 2|\bar{\partial}_J(u)|_J^2 dS + 2u^*\omega,$$

pričom sme využili výsledok predchádzajúceho cvičenia

$$|\bar{\partial}_J(u)|_J^2 = 2|\bar{\partial}_J(u)(s)|_J^2 = 2\left|\frac{1}{2}(\partial_s u + J\partial_t u)\right|_J^2 = \frac{1}{2}|\partial_s u + J\partial_t u|_J^2.$$

Potom pre energiu zobrazenia $u : S^2 \to M$ dostávame nasledujúcu lemu:

LEMMA 15.2. *Nech ω je symplektická froma na hladkej variete M a J je s ňou kompatibilná takmer komplexná štruktúra. Potom pre energiu hladkého zobrazenia $u : S^2 \to M$ platí*

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_{S^2} |du|_J^2 dS = \int_{S^2} |\bar{\partial}_J(u)|_J^2 dS + \int_{S^2} u^*(\omega).$$

Ak zobrazenie u predstavuje J-holomorfnú krivku, potom platí

$$E(u) = \int_{S^2} u^*(\omega) = \int_{u(S^2)} \omega.$$

□

Z toho vidíme, že J-holomorfné krivky minimalizujú energiu (g_J-plochu ich obrazu) v rámci homologickej triedy $A = [\mathrm{Im}(u)]$, a tým pádom sú to harmonické zobrazenia. Tiež je zjavné, že energia J-holomorfnej krivky je jej topologickým invariantom. Nakoľko pri výpočte energie integrujeme kladné čísla, bude $E(u) > 0$ pokiaľ $A \neq 0$.

Poznámka: Ako sme videli v prednáške 16, podmienkou na to, aby varieta M bola symplekticky asférická je $\int_{S^2} g^*\omega = 0$ pre všetky $g \in \pi_2(M)$. To znamená, že v takejto variete neexistujú netriviálne J-holomorfné sféry.

Cvičenie 15.3. Nech (V, ω, J) je symplektický vektorový priestor s kompatibilnou (takmer) komplexnou štruktúrou J a príslušným skalárnym súčinom g_J. Pre vektory v, w označme rovnobežník nimi tvorený ako $P(v, w)$. Ukážte, že platí

$$\omega(v, w) \leq g_J\text{-plocha } P(v, w).$$

Ukážte, že rovnosť nastáva iba pre vektory $w \in \mathrm{Span}[v, Jv]$. Odvoďte z toho, že J-holomorfné krivky v (M, ω, J) minimalizujú g_J-plochu.

3. Modulárne priestory J-holomorfných kriviek

Ukázali sme si, že J-holomorfné krivky sú práve tie, pre ktoré $\bar{\partial}_J(u) \equiv 0$. Pozrime sa teraz na priestory na ktorých operátor $\bar{\partial}_J$ vlastne žije.

Na jednej strane máme priestor hladkých kriviek $\mathcal{B} := C^\infty(S^2, M)$, t.j. priestor hladkých zobrazení z S^2 do M. Každému takémuto zobrazeniu u môžeme priradiť $\bar{\partial}_J(u)$, 1-formu v $\mathcal{E}_u = \Omega^{0,1}(S^2, u*TM)$. To nás vedie k nasledujúcemu fibrovanému priestoru:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_u & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ & & \downarrow \\ & & \mathcal{B} \end{array}$$

Potom je operátor $\bar{\partial}_J$ rezom tejto fibrácie

$$\bar{\partial}_J : \mathcal{B} \to \mathcal{E}, \qquad \bar{\partial}_J : u \mapsto (u, \bar{\partial}_J(u)).$$

Priesečník obrazu $\bar{\partial}_J$ s nulovým rezom bude práve priestor J-holomorfných kriviek $\bigcup \mathcal{M}(A, J)$, skladajúci sa z viacerých komponentov pre rôzne homologické triedy

$A \in H_2(M)$. Vo všeobecnosti, priesek rezu $\bar{\partial}_J$ s nulovým rezom fibrácie $\mathcal{E}$ nemusí byť tranzverzálny, a tým pádom modulárny priestor J-holomorfných kriviek $\mathcal{M}(A, J)$ v homologickej triede A môže obsahovať výrazné singularity.

Problém možných singularít priestoru $\mathcal{M}(A, J)$ možno obísť tak, že povolíme istú variabilitu takmer komplexnej štruktúry J. Neobmedzíme sa iba na takmer komplexné štruktúry z $\mathcal{J}(\omega)$, t.j. kompatibilné so symplektickou štruktúrou ω na variete M, ale vezmeme do úvahy väčší priestor $\mathcal{J}_\tau(\omega)$, zložený z takmer komplexných štruktúr skrotených symplektickou štruktúrou ω. Priestor $\mathcal{J}_\tau(\omega)$, ako sme už spomínali v kapitole 11, bude kontraktibilný, ale otovorený v priestore všetkých takmer komplexných štruktúr, t.j. bude mať plnú dimenziu.

Potom sa dá ukázať, že vlastnosť "priestor" $\mathcal{M}(A, J)$ je nesingulárny (regulárny) je v $\mathcal{J}(\omega)$ generická, t.j. priestor takmer komplexných štruktúr J, pre ktoré má $\mathcal{M}(A, J)$ singularity má v $\mathcal{J}(\omega)$ určitú kodimenziu. Navyše, každé dve takmer komplexné štruktúry s regulárnymi modulárnymi priestormi možno spojiť 1-parametrickou triedou regulárnych takmer komplexných štruktúr. Preto medzi priestormi $\mathcal{M}(A, J_0)$ a $\mathcal{M}(A, J_1)$ budeme mať triviálny kobordizmus, tým pádom budú difeomorfné.

Z teórie indexu eliptických diferenciálnych operátorov nakoniec pre očakávanú dimenziu modulárneho priestoru $\mathcal{M}(A, J)$ dostaneme:

$$\dim \mathcal{M}(A, J) = 2(c_1(TM, J) \cdot A + n),$$

kde $c_1(TM, J)$ je prvá Chernova trieda dotykovej fibrácie TM. Dimenzia zodpovedá tzv. *Fredholmovmu indexu* diferenciálneho operátora $\bar{\partial}_J$.

V prednáške 11 sme videli, že grupa komplexných transformácií $S^2 = \mathbb{CP}^1$ je $PSL(2, \mathbb{C})$. Táto grupa má (reálnu) dimenziu 6 a je, naneštastie, nekompaktná. Grupa $PSL(2, \mathbb{C})$ má prirodzenú voľnú akciu na modulárnom priestore J-holomorfných kriviek $\mathcal{M}(A, J)$, nakoľko pre $g \in PSL(2, \mathbb{C})$ a J-holomorfnú krivku $u : S^2 \to M$ bude aj zložené zobrazenie

$$S^2 \xrightarrow{g} S^2 \xrightarrow{u} M$$

J-holomorfné.

Na základe jedného zo základných výsledkov teórie J-holomorfných kriviek, Gromovovej vety o kompaktnosti, na ktorú sa tu len odvoláme, dostaneme, že faktorizovaný priestor $\mathcal{M}(A, J)/G$ bude kompaktný.

4. J-holomorfné krivky v $S^2 \times T^{2n-2}$

Vyššie uvedenú teóriu, z ktorej sme naozaj len opatrne načrtli jej najdôležitejšie kontúry, môžeme použiť pre dokončenie argumentu o symplektickej ťave.

Pre modulárny priestor J-holomorfných kriviek uvažujme tzv. *vyhodnocujúce zobrazenie*

$$\mathrm{ev}_J : \mathcal{M}(A, J) \times_G S^2 \to M, \qquad \mathrm{ev}_J : (u, z) \mapsto u(z).$$

Potom $\mathrm{Im}(\mathrm{ev}_J)$ predstavuje body variety M, cez ktoré prechádza niektorá z J-holomorfných kriviek v homologickej triede A.

Potom máme

$$\dim \big(\mathcal{M}(A, J) \times_G S^2\big) = 2(c_1 \cdot A + n) - \dim(G) + \dim(S^2).$$

V prípade variety $S^2 \times T^{2n-2}$ má prvá Chernova trieda hodnotu $c_1(S^2 \times T^{2n-2}) = 2h$, kde $h = PD([\mathrm{pt} \times T^{2n-2}])$. Pre homologickú triedu $A = [S^2 \times \mathrm{pt}]$, ktorá nás zaujíma, dostaneme

$$\dim \big(\mathcal{M}(A, J) \times_G S^2\big) = 2(2PD[\mathrm{pt} \times T^{2n-2}] \cdot [S^2 \times \mathrm{pt}] + n) - 6 + 2 = 2(2+n) - 4 = 2n.$$

Teraz môžme použiť nasledujúci argument využívajúci kobordizmus medzi modulárnymi priestormi $\mathcal{M}(A, J_{\mathrm{split}})$ a $\mathcal{M}(A, J)$, kde J_{split} je štandardná komplexná štruktúra na $\mathbb{CP}^1 \times T_{\mathbb{C}}^{n-1}$ a J je všeobecná takmer komplexná štruktúra na $S^2 \times T^{2n-2}$. Nakoľko $2n$ je presne dimenzia priestoru $\mathbb{CP}^1 \times T_{\mathbb{C}}^{n-1}$, a ako sa dá pomerne jednoducho presvedčiť, zobrazenie $\mathrm{ev}_{J_{\mathrm{split}}}$ má stupeň 1, bude mať aj zobrazenie ev_J stupeň 1 a cez každý bod variety $S^2 \times T^{2n-2}$ bude prechádzať práve jedna J-holomorfná krivka v triede $[S^2 \times \mathrm{pt}]$. Týmto načrtli akými argumentami sa dá vyplniť chýbajúca medzera v dôkaze Gromovovej vety o nezmačknuteľnosti.

"$\Box$"

5. Záverom

Tieto prednášky treba chápať ako úvod do problematiky symplektickej geometrie a topológie, resp. teórie J-holomorfných kriviek. Pri ich príprave som čerpal inšpiráciu z klasických učebníc a textov, ktoré sa týmto témam venujú detailnejšie a rigoróznejšie, pochádzajú od popredných odborníkov, ktorí sa sami spolupodieľali na budovaní spomenutých teórií. Nedá sa na tomto mieste spraviť nič iné, ako ich prípadnému záujemcovi a čitateľovi týchto kapitol odporučiť.

Dnes už klasickou knihou venovanou symplektickej topológii je práca Dusy McDuff a Dietmara Salamona *Introduction to Syplectic Topology*, [?], z ktorej som čerpal pri príprave kapitol 4, 8, 14. Kniha *J-holomorphic Curves and Symplectic Topology*, [?] sa venuje teórii J-holomorfných kriviek a obsahuje všetky zamlčané časti dôkazov, ktoré sme v kapitolách 14, 15 iba naznačili. Táto kniha pochádza od tých istých autorov ako predošlá. Doplnkovým čítaním ponúkajúcim čiastočne odlišný pohľad na symplektickú geometriu a topológiu je zborník *Symplectic Geometry and Topology*, [?] ktorý vznikol z prednášok na letnej škole organizovanej Institute of Advanced Studies a Park City Mathematics Institute v roku 1997.

Pre ďalšie informácie týkajúce sa všeobecných otázok algebraickej topológie, charakteristických tried, 4-rozmerných variet či komplexných variet odporúčam knihy Raoula Botta a Loringa Tua *Differential Forms in Algebraic Topology*, Glena Bredona *Topology and Geometry*, Johna Milnora a Jamesa Stasheffa, *Characteristic Classes*, Roberta Gompfa a Andrása Stipsicza *4-manifolds and Kirby Calculus* a Wolfa Bartha, Klausa Huleka, Chrisa Petersa a Antonia Van de Vena *Compact complex surfaces.*

PREDNÁŠKA 16

Symplekticky asférické variety a Arnoľdova hypotéza (JK)[1]

Symplekticky asférické variety predstavujú zaujímavú a dôležitú triedu symplektických variet. V symplektickej geometrii a topológii sa objavujú v rôznych situáciách. Napríklad, v nedávnych rokoch sa pre ne podarilo dokázať známu Arnoľdovu hypotézu (podrobnejšie poz. časť 3) zo 60-tych rokov 20. storočia o počte pevných bodov hamiltonovských symplektomorfizmov (o ktorých sa tiež hovorieva ako o hamiltonovských alebo exaktných difeomorfizmoch). Tým sa podstatne rozšírila trieda súvislých uzavretých symplektických variet M, pre ktoré sa dosiaľ podarilo dokázať, že každý hamiltonovský symplektomorfizmus $M \to M$ má aspoň toľko pevných bodov, koľko je minimálny počet kritických bodov každej hladkej reálnej funkcie na M. Na druhej strane, popri ocenení tohto významného úspechu, nezaškodí realisticky pripomenúť, že Arnoľdova hypotéza stále zostáva nerozhodnutá pre veľmi mnohé z tých symplektických variet, ktoré nie sú symplekticky asférické (podrobnejšie poz. záverečný úsek v 2.2 a poznámky v 3.2 o predchádzajúcom pokroku v overovaní Arnoľdovej hypotézy alebo jej obmien).

Tento článok, ktorého zameranie je stručne zhrnuté v názve, je mierne rozšírenou verziou prednášok, ktoré som predniesol v rámci Zimnej školy zo symplektickej geometrie, konanej na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave vo februári 2007. Delí sa na tri časti, z ktorých každá má niekoľko podčastí. Samotný pojem symplekticky asférickej variety si priblížime v časti 2, a to z topologického (v 2.1) aj geometrického (v 2.2) hľadiska. Na základné vyčlenenie symplekticky asférických variet spomedzi ostatných symplektických variet použijeme prostriedky algebraickej topológie. Preto najmä niektoré poznatky o homotópii a homotopických grupách, ako aj o ich vzťahu k homologickým grupám (Hurewiczova veta o izomorfizme) stručne uvedieme v prípravnej časti 1. Niektoré z nich nám v časti 3, po pripomenutí (v 3.1) pojmu hamiltonovského symplektomorfizmu, sformulovaní (v 3.2) Arnoľdovej hypotézy a po pridaní (v 3.3 a 3.4) ďalších topologických myšlienok a výsledkov poslúžia tiež pri stručnom náčrte (v 3.5) spomínaného nedávneho dôkazu Arnoľdovej hypotézy pre symplekticky asférické variety. V ňom jeho hlavný tvorca Yuli Rudyak ([**19**]), v určitých fázach spolupracujúci s J. Opreom (poz. [**20**]), nadviazal na dlhoročné úsilie viacerých matematikov, činných na jednej strane v algebraickej topológii, a na druhej strane v analyticky a geometricky zameraných oblastiach matematiky.

V ďalšom texte budeme používať označenie $\mathbb{R}$ pre pole reálnych čísel a $\mathbb{Z}$ pre okruh celých čísel.

1. Prípravné pojmy a úvahy

1.1. Homotópia a homotopická ekvivalencia. V tejto časti sa budeme krátko zaoberať pojmom homotópie (homotopickej deformácie) spojitých zobrazení

[1]Počas prípravy tohto článku bol autor členom dvoch výskumných kolektívov, čiastočne podporovaných grantovou agentúrou VEGA

medzi topologickými priestormi a povieme si o homotopickom roztriedení priestorov vzhľadom na reláciu homotopickej ekvivalencie.

Nech $I = \langle 0, 1\rangle$ označuje uzavretý interval medzi 0 a 1 na reálnej osi. Ako je v topológii a príbuzných oblastiach zvykom, zobrazeniami medzi topologickými priestormi budeme rozumieť *spojité* zobrazenia.

Pripomenieme, že zobrazenie $f : X \to Y$ je *homotopné* so zobrazením $g : X \to Y$, čo zapisujeme ako $f \simeq g$, ak jestvuje taká (spojitá) *homotópia* $H : X \times I \to Y$, že $H(x, 0) = f(x)$ a $H(x, 1) = g(x)$ pre všetky $x \in X$; presnejšie potom píšeme $H : f \simeq g$. Poznamenáme, že v topologickej literatúre (napr. [**22**, Ch. 1, Sec. 7]) sa zobrazenie $c : I \to X$ nazýva *cesta* v X z bodu $c(0)$ do bodu $c(1)$. Pre pevne zvolený (ľubovoľný) bod $x_0 \in X$ nie je $H(x_0, -) : I \to Y$ nič iné ako cesta v Y z bodu $f(x_0)$ do bodu $g(x_0)$.

Teda máme $H : f \simeq g$ práve vtedy, keď f sa dá „zdeformovať" na g cez *spojitý* 1-parametrický systém $\{H_t\}_{t\in I}$ zobrazení $H_t : X \to Y$, čo znamená, že $H_0 = f$, $H_1 = g$, pričom spojitosť systému $\{H_t\}_{t\in I}$ znamená, že zobrazenie $X \times I \to Y$, $(x, t) \mapsto H_t(x)$, je spojité. O H_t sa niekedy hovorí ako o homotópii (alebo stave homotópie) H v „čase" $t \in I$.

Pre $f, g, h : X \to Y$ máme $f \simeq f$ (homotópia $H(x, t) = f(x)$), ďalej, ak $F : f \simeq g$, tak $F^- : g \simeq f$, kde $F^-(x, t) = F(x, 1 - t)$ a napokon, ak $F : f \simeq g$ a $G : g \simeq h$, tak $F * G : f \simeq h$, kde

$$(F * G)(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & \text{ak } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ G(x, 2t - 1), & \text{ak } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

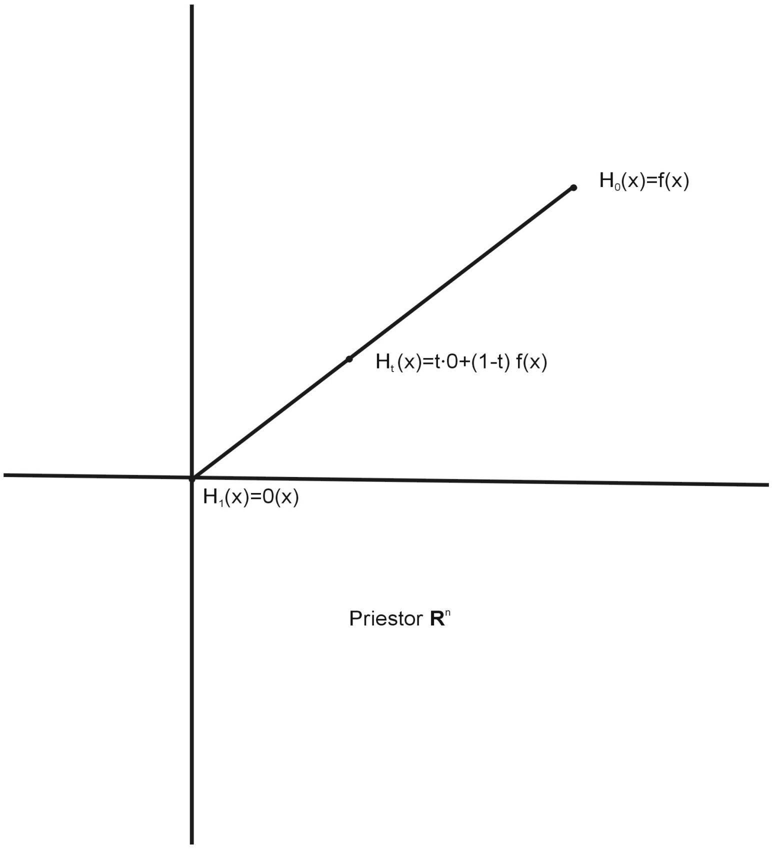
Teda relácia homotopnosti (ináč povedané, relácia „byť homotopný") je relácia ekvivalencie. Trieda ekvivalencie zobrazenia $f : X \to Y$ (pripomenieme, že ňou je množina $\{g; g \simeq f\}$) sa zvyčajne označuje $[f]$ a nazýva sa *homotopická trieda* (alebo aj *trieda homotópie*) zobrazenia f. Množinu všetkých homotopických tried zobrazení z X do Y označíme $[X, Y]$.

Napríklad, pre ľubovoľný priestor X a zobrazenie $f : X \to \mathbb{R}^n$ (n nezáporné) máme $f \simeq 0$, kde 0 je konštantné zobrazenie do $0 = (0, \dots, 0)$, $0(x) = (0, \dots, 0)$ pre všetky $x \in X$. Ako homotópiu od f k 0 stačí zobrať $H : X \times I \to \mathbb{R}^n$, $H(x, t) = t \cdot 0 + (1 - t)f(x)$ (teda $H(x, t)$ je bod úsečky s krajnými bodmi 0 resp. $f(x)$, ako na obr. 1).

Ak existujú také zobrazenia $f : X \to Y$ a $g : Y \to X$, že $g \circ f \simeq \mathrm{id_X}$ a $f \circ g \simeq \mathrm{id_Y}$, tak f sa nazýva *homotopická ekvivalencia*, a hovoríme, že priestor X je *homotopicky ekvivalentný* s priestorom Y (alebo tiež, že priestor X má alebo určuje ten istý *homotopický typ* ako priestor Y), čo zapisujeme ako $X \simeq Y$. Samozrejme, ak sú dva topologické priestory homeomorfné, tak tým skôr sú homotopicky ekvivalentné. Podobne ako relácia homeomorfnosti, aj relácia homotopickej ekvivalentnosti (ináč povedané, relácia „byť homotopicky ekvivalentný") sa dobre správa vzhľadom na skladanie zobrazení (nie je ťažké uvedomiť si, že zloženia homotopných zobrazení sú homotopné) a ľahko sa dá dokázať, že je reláciou ekvivalencie.

Priestor je *kontraktibilný* (alebo *stiahnuteľný*), ak je homotopicky ekvivalentný s jednobodovým priestorom (má homotopický typ jednobodového priestoru). Napríklad, $\mathbb{R}^n$ (a podobne aj každý konvexný podpriestor priestoru $\mathbb{R}^n$) je kontraktibilný priestor. Totiž, $\mathbb{R}^n \simeq \{0\}$, lebo inklúzia $i : \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, $i(0) = 0$, je homotopická ekvivalencia, keďže pre konštantné zobrazenie $c : \mathbb{R}^n \to \{0\}$ máme $c \circ i = \mathrm{id}_{\{0\}}$ a $i \circ c \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ (ako homotópiu od $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ k $i \circ c$ stačí zobrať $H_t(x) = (1 - t)x$).

Obrazne môžeme povedať, že v množinovoteoretickej (inými slovami: všeobecnej) topológii sa používajú „okuliare s topologickým filtrom" (samozrejme, slovo „filter" tu má svoj všedný – nematematický – význam!) ktorými sa nedajú rozlíšiť navzájom homeomorfné priestory, takže pomocou takýchto okuliarov napr. nevidno rozdiel medzi štvorcom a kruhom. V algebraickej topológii sa používajú ešte slabšie



OBRÁZEK 1. Homotópia $H(x,t) = (1-t)f(x)$ medzi f a 0; obraz ňou určenej cesty z $f(x)$ do $0(x) = 0$ je úsečka spájajúca $f(x)$ a 0.

„okuliare s homotopickým filtrom", ktorými sa nedajú rozlíšiť priestory navzájom homotopicky ekvivalentné. Teda, ako sme si uvedomili v predchádzajúcom príklade, ak si nasadíme „homotopické okuliare", tak napríklad nezbadáme žiadny rozdiel medzi takým obrovským objektom, akým je $\mathbb{R}^2$ a takým maličkým, akým je jeho jednobodový podpriestor! Hoci sa to môže zdať pri pohľade zvonka čudné alebo paradoxné, práve „znížením rozlíšenia" (približne v duchu zvolania: „Ustúpte stromy, aby som videl les!") geniálny objav topologickej resp. homotopickej „optiky" umožnil zapojenie mohutného aparátu súčasnej algebry, geometrie a analýzy do riešenia, a napokon aj vyriešenia, mnohých matematických otázok. Takou bola napr. správnosť alebo nesprávnosť tvrdenia známeho ako veľká Fermatova veta, alebo aj niektoré otázky symplektickej geometrie a viaceré iné problémy, o ktorých sa pri použití iba „klasickej optiky" (s najvyšším možným rozlíšením, ale obmedzujúcej použiteľné prostriedky často iba na matematický aparát známy okolo konca 19. storočia) dlho zdalo, že sú nad ľudské sily.

1.2. Homotopické grupy. V tejto časti si stručne povieme o homotopických grupách topologických priestorov, resp. ich párov. Presnejšie, zameriame sa najmä na „vyššie" homotopické grupy, o ktorých sa v základných prednáškach z algebraickej topológie ťažko dá povedať niečo podstatné, ak sa vôbec dospeje k ich definícii. Väčšinou sa hovorí iba o vari najznámejšej homotopickej grupe, ktorú zaviedol už Poincaré koncom 19. storočia, a tou je *fundamentálna grupa* topologického priestoru. V rozšírenom kontexte, zahŕňajúcom aj vyššie homotopické grupy, sa na fundamentálnu grupu možno pozerať ako na prvú homotopickú grupu (za ktorou nasleduje druhá – práve tá je dôležitá pri charakterizácii symplekticky asférických variet – potom tretia atď.).

Pri topologickej charakterizácii symplekticky asférických variet budeme tiež potrebovať určité fakty o homológiách a kohomológiách. O tých však čitateľ isto má aspoň základné vedomosti, a ak sa v texte stretne s niečím, čo ich v určitom zmysle presiahne, tak dúfame, že sa nevzdá, a všetko potrebné si doplní z učebníc algebraickej topológie, akými sú napr. [**8**], [**1**] alebo [**22**]. Všetky tieto knihy sú v angličtine, Spanierova kniha existuje aj v ruskom preklade; žiaľ, zatiaľ niet žiadnej slovenskej učebnice algebraickej topológie.

Pre každé $n \geq 1$ máme n-rozmernú jednotkovú kocku

$$I^n = I \times \cdots \times I = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \ldots, n\}.$$

Jej okraj ∂I^n je množina takých $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$, pre ktoré aspoň jedno x_i je 0 alebo 1. Napríklad $I^1 = I$ a $\partial I^1 = \{0, 1\}$.

Kocka I^n, s indukovanou topológiou, je topologický podpriestor priestoru $\mathbb{R}^n$ (so štandardnou topológiou). Teda môžeme uvažovať o (spojitých, ako vždy) zobrazeniach $I^n \to X$ pre ľubovoľný topologický priestor X.

Presnejšie, v (ľubovoľnom) priestore X pevne zvolíme dajaký bod x_0, ktorý potom nazývame *referenčný bod* (hovorí sa mu aj *bázový*, *význačný* a pod.) priestoru X.

Uvažujme teraz o takých zobrazeniach $f : I^n \to X$, ktoré okraj ∂I^n zobrazujú do referenčného bodu x_0; teda máme $f(\partial I^n) = \{x_0\}$. Pre príčinu, ktorú objasníme neskôr budeme o takýchto zobrazeniach hovoriť ako o *n-sférických* zobrazeniach z I^n do X *zakotvených* v x_0. Povieme, že n-sférické zobrazenie $f : I^n \to X$ zakotvené v x_0 je v relácii $\sim$ s n-sférickým zobrazením $g : I^n \to X$ zakotveným v x_0 a napíšeme $f \sim g$, ak f sa dá zdeformovať na g homotópiou, ktorá v každom čase $t \in I$ je n-sférickým zobrazením $I^n \to X$ zakotveným v x_0. Teda $f \sim g$ napíšeme, ak jestvuje taká homotópia $H_t : I^n \to X$, že $H_t(\partial I^n) = \{x_0\}$ pre každé $t \in I$, pričom $H_0 = f$ a $H_1 = g$. Potom $\sim$ je relácia ekvivalencie. Triedu ekvivalencie (vzhľadom na túto reláciu) reprezentovanú f označíme $[f]$ a množinu všetkých tried ekvivalencie vzhľadom na reláciu $\sim$ označíme $[(I^n, \partial I^n), (X, x_0)]_0$.

Pevne zvoľme homotopickú ekvivalenciu medzi faktorovým priestorom $I^n/\partial I^n$ a n-rozmernou sférou

$$S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 +, \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

Pritom označíme s_0 bod z S^n, zodpovedajúci (pri našej homotopickej ekvivalencii) okraju ∂I^n, „zrútenému“ (pri faktorizácii) do bodu. Podobne vo faktorovom priestore $X/\{x_0\}$ označíme znova x_0 (nedorozumenie tu isto nehrozí) bod, zodpovedajúci (triviálnemu) „zrúteniu“ $\{x_0\}$ do bodu.

Na množine zobrazení $S^n \to X$ zobrazujúcich s_0 na x_0 definujeme reláciu $\sim$ takto: $f \sim g$, ak sa f dá zdeformovať na g homotópiou, ktorá v každom čase $t \in I$ zobrazuje s_0 na x_0. Nie je ťažké overiť, že $\sim$ je relácia ekvivalencie; triedu ekvivalencie reprezentovanú f označíme $[f]$ a množinu všetkých tried ekvivalencie označíme $[S^n, X]_0$. Jestvuje bijekcia medzi množinami $[(I^n, \partial I^n), (X, x_0)]_0$ a $[S^n, X]_0$. Vďaka nej môžeme $[(I^n, \partial I^n), (X, x_0)]_0$ stotožniť s $[S^n, X]_0$. V tomto zmysle môžeme prvky z $[(I^n, \partial I^n), (X, x_0)]_0$ reprezentovať takými zobrazeniami z *n-rozmernej sféry*, ktoré s_0 zobrazujú na x_0, teda takými $f : S^n \to X$, že $f(s_0) = x_0$. Práve preto sme zobrazenia $f : I^n \to X$, ktoré ∂I^n zobrazujú do referenčného bodu x_0 nazvali *n-sférické*.

Na množine $[(I^n, \partial I^n), (X, x_0)]_0$ definujeme teraz binárnu operáciu „$\cdot$“. Najskôr pre ľubovoľné dve n-sférické zobrazenia $f, g : I^n \to X$ zakotvené v bode x_0

definujeme zobrazenie $f * g : I^n \to X$ predpisom

$$(f * g)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} f(2x_1, x_2, \dots, x_n), & \text{ak } 0 \le x_1 \le \frac{1}{2}, \\ g(2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n), & \text{ak } \frac{1}{2} \le x_1 \le 1. \end{cases}$$

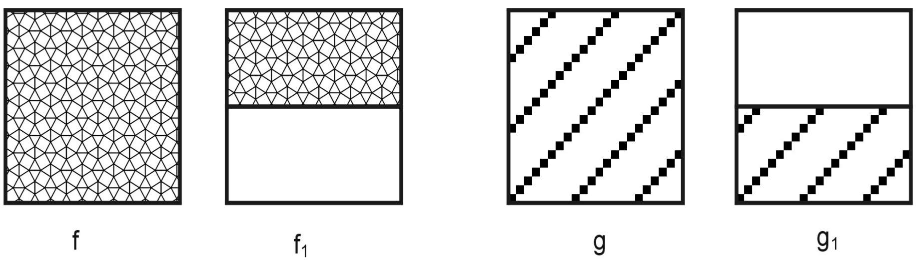
Pripomenieme, že cesta $c : I \to X$ z bodu $c(0)$ do bodu $c(1)$ taká, že $c(0) = c(1)$ sa nazýva ***slučka*** (v bode $c(0) = c(1)$). Teda, špeciálne, 1-sférické zobrazenie zakotvené v bode x_0 nie je nič iné ako slučka v x_0, a ak f a g sú 1-sférické zobrazenia zakotvené v x_0, tak $f * g$ je tiež slučka v x_0, ktorá vznikne tak, že najskôr (voľne povedané) „prebehneme“ (začínajúc v x_0) slučku f dvojnásobnou rýchlosťou, a potom aj slučku g, takisto dvojnásobnou rýchlosťou.

Pre všeobecné n je tiež jasné, že $f * g$ je dobre definované (a spojité) zobrazenie, pričom $(f * g)(\partial I^n) = \{x_0\}$, a teda $f * g$ je n-sférické zobrazenie zakotvené v bode x_0. Výsledok binárnej operácie „$\cdot$“ medzi ľubovoľnými dvoma prvkami $[f]$, $[g] \in [(I^n, \partial I^n), (X, x_0)]_0$ (kde, samozrejme, f a g sú n-sférické zobrazenia $I^n \to X$ zakotvené v x_0) definujeme jednoducho predpisom

$$[f] \cdot [g] = [f * g].$$

Nie je ťažké si uvedomiť, že táto definícia je dobrá, teda že uvedený predpis nezávisí od výberu reprezentantov (ak $[f] = [\tilde{f}]$ a $[g] = [\tilde{g}]$, tak tiež $[f * g] = [\tilde{f} * \tilde{g}]$). Množina $[(I^n, \partial I^n), (X, x_0)]_0$ s operáciou „$\cdot$“ (resp. množina $[S^n, X]_0$ so zodpovedajúcou operáciou) je grupa (dôkaz a ďalšie informácie možno nájsť napr. v **[8]** alebo **[22]**); označíme ju $\pi_n(X, x_0)$ a nazývame ju ***n-tá homotopická grupa priestoru X s referenčným bodom*** x_0 (alebo *„v bode* x_0*“*). Špeciálne, o grupe $\pi_1(X, x_0)$ sa zvyčajne možno dozvedieť dosť veľa aj v celkom základných kurzoch algebraickej topológie – pod menom *fundamentálnej grupy priestoru X s referenčným bodom* x_0 (alebo *„v bode* x_0*“*). Táto grupa súvisí tiež so slávnou *Poincarého hypotézou* ([**8**, str. 390]), ktorej dôkaz už pri zverejnení prvých správ o ňom (ale vari ešte väčšmi v lete 2006, v čase madridského Medzinárodného kongresu matematikov, po Pereľmanovom odmietnutí Fieldsovej medaily) zaujal dokonca aj širokú svetovú verejnosť.

Fundamentálna grupa $\pi_1(X, x_0)$ môže byť aj nekomutatívna. Napríklad, fundamentálna grupa „číslice 8“ – teda jednobodového spojenia dvoch kružíc – ako podpriestoru v $\mathbb{R}^2$ je ***voľná grupa na dvoch generátoroch***, z ktorých každý – voľne povedané – zodpovedá jednej z tých dvoch kružníc. Ale už pre všetky $n \ge 2$ sú homotopické grupy $\pi_n(X, x_0)$ komutatívne. Aby sme sa o tom presvedčili, zoberme ľubovoľné dva prvky $[f]$ a $[g]$ v $\pi_n(X, x_0)$, kde $n \ge 2$. Potom $[f] = [f_1]$ resp. $[g] = [g_1]$, kde f_1 resp. g_1 sú n-sférické zobrazenia zakotvené v bode x_0, schématicky znázornené na obr. 2.



OBRÁZEK 2. Homotopická deformácia f na f_1 resp. g na g_1; biele sú tie časti, ktoré sa f_1 resp. g_1 zobrazujú na x_0.

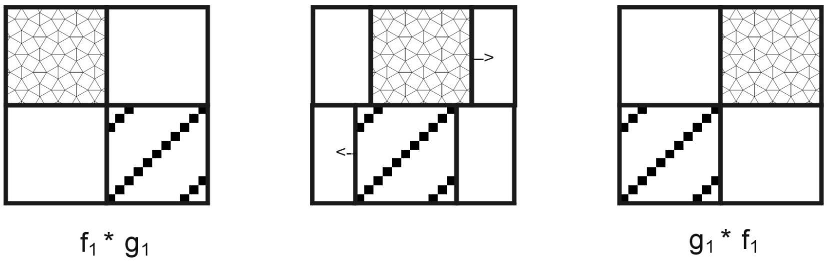
Naozaj, homotópiu $F : S^n \times I \to X$ medzi f a $f_1 = F(\ ,1)$ môžeme definovať takto:

$$F((x_1, x_2, \dots, x_n), t) = \begin{cases} x_0, & \text{ak } 0 \le x_2 \le \frac{t}{2}, \\ f(x_1, \frac{2x_2 - t}{2 - t}, x_3, \dots, x_n), & \text{ak } \frac{t}{2} \le x_2 \le 1. \end{cases}$$

Celkom podobne možno definovať vhodnú homotópiu medzi g a g_1.

Potom $f_1 * g_1$ možno homotopicky zdeformovať (samozrejme, cez n-sférické zobrazenia zakotvené v bode x_0) na $g_1 * f_1$, ako je naznačené na obr. 3. Takže máme napokon

$$[f] \cdot [g] = [f * g] = [f_1 * g_1] = [g_1 * f_1] = [g * f] = [g] \cdot [f].$$



Obrázek 3. V strednom štvorci je naznačená homotópia medzi $f_1 * g_1$ (vľavo) a $g_1 * f_1$ (vpravo).

V prípade fundamentálnej grupy ($n = 1$) podobná úvaha (ako pri $n \geq 2$) nie je možná, keďže pri nej nám, takpovediac, chýba jedna súradnica.

Ak X je topologický priestor s referenčným bodom x_0, Y priestor s referenčným bodom y_0 a zobrazenie $\alpha : X \to Y$ rešpektuje referenčné body (teda máme $\alpha(x_0) = y_0$), tak pre každé n-sférické zobrazenie $f : I^n \to X$ zakotvené v x_0 bude zložené zobrazenie $\alpha \circ f : I^n \to Y$ samozrejme n-sférické, zakotvené v y_0. Ľahko sa overí, že priradenie $[f] \to [\alpha \circ f]$ nezávisí od výberu reprezentanta a definuje zobrazenie, ktoré označíme $\alpha_\# : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$. Toto zobrazenie je homomorfizmus a hovorievame o ňom ako o *homomorfizme homotopických grúp indukovanom zobrazením* α. Navyše, homotopné zobrazenia (homotópia musí prebiehať cez zobrazenia rešpektujúce referenčný bod!) indukujú ten istý homomorfizmus homotopických grúp. Nie je ťažké presvedčiť sa, že $(\mathrm{id}_X)_\# = \mathrm{id}_{\pi_n(X,x_0)}$ a tiež, že ak X, Y a Z sú priestory s referenčnými bodmi (so zachovaním poradia) x_0, y_0 a z_0 a zobrazenia $\alpha : X \to Y$ a $\beta : Y \to Z$ rešpektujú referenčné body, tak máme $(\beta \circ \alpha)_\# = \beta_\# \circ \alpha_\#$. Takže v reči teórie kategórií je π_n (pre $n \geq 1$) kovariantný funktor z kategórie topologických priestorov s referenčným bodom, v ktorej sú morfizmami spojité zobrazenia rešpektujúce referenčný bod, do kategórie grúp (resp. abelovských grúp, pre $n \geq 2$), v ktorej sú morfizmami homomorfizmy grúp.

Na dokreslenie celkového obrazu poznamenáme, že sa definuje aj $\pi_0(X, x_0)$, ale iba ako *množina* komponentov lineárnej súvislosti priestoru X, v ktorej sa komponent obsahujúci x_0 považuje za referenčný prvok. Zobrazenie $\alpha : X \to Y$ také, že $\alpha(x_0) = y_0$ potom indukuje iba *zobrazenie množín* $\alpha_\# : \pi_0(X, x_0) \to \pi_0(Y, y_0)$, ktoré komponentu obsahujúcemu x priradí komponent obsahujúci $\alpha(x) \in Y$, pre každý bod $x \in X$. Ľahko sa overí, že π_0 je kovariantný funktor z kategórie topologických priestorov s referenčným bodom do kategórie množín s referenčným prvkom.

Zostaňme teraz pri $n \geq 1$. Pojem „obyčajnej“ homotopickej ekvivalencie topologických priestorov možno zrejmým spôsobom upraviť tak, že dostaneme pojem *homotopickej ekvivalencie priestorov s referenčným bodom.* Ak $\alpha : X \to Y$ je homotopická ekvivalencia medzi priestorom X s referenčným bodom x_0 a priestorom Y s referenčným bodom y_0, tak indukovaný homomorfizmus $\alpha_\# : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ je izomorfizmom grúp. Je tiež pravda, že „obyčajná“ homotopická ekvivalencia $\beta : X \to Y$ indukuje izomorfizmus $\beta_\# : \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, f(x))$ pre každý bod $x \in X$.

Pomocou homotopických grúp možno potom o niektorých priestoroch ukázať, že nie sú homotopicky ekvivalentné. Napríklad, je zrejmé, že kontraktibilný priestor musí mať všetky homotopické grupy triviálne, a teda napr. kružnica, ktorej fundamentálna grupa je izomorfná so $\mathbb{Z}$, nemôže byť homotopicky ekvivalentná s jednobodovým priestorom, teda nemôže byť kontraktibilná.

Ďalej definíciu homotopickej grupy pozmeníme tak, aby sme popri „absolútnych“ grupách $\pi_n(X, x_0)$ dostali tiež „relatívne“ homotopické grupy $\pi_n(X, A, a_0)$, kde X je topologický priestor, A je podpriestor v ňom a $a_0 \in A$ je pevne zvolený referenčný bod. O (X, A) sa v týchto súvislostiach zvyčajne hovorí ako o *páre priestorov* alebo *topologickom páre*, s referenčným bodom a_0. Presnejšie, homotopická *grupa* páru (X, A) s referenčným bodom a_0 sa definuje už nie pre $n \geq 1$, ale pre $n \geq 2$; pre $n = 1$ dostaneme iba *množinu* $\pi_1(X, A, a_0)$.

Definujeme *n-sférické zobrazenie páru (X, A) zakotvené v bode a_0* ako také $f : I^n \to X$, že $f(\partial I^n) \subset A$ a $f(\overline{\partial I^n \setminus I^{n-1} \times \{1\}}) = \{a_0\}$. Reláciu ekvivalencie $\sim$ na množine takýchto zobrazení definujeme takto: $f \sim g$, ak existuje taká homotópia H_t od f ku g, ktorá je v každom čase $t \in I$ n-sférickým zobrazením páru (X, A) zakotveným v a_0. Príslušnú množinu tried ekvivalencie potom označíme $\pi_n(X, A, a_0)$. Pre $n \geq 2$ binárnu operáciu „$\cdot$“ na $\pi_n(X, A, a_0)$ definujeme obdobne ako v prípade $\pi_n(X, x_0)$. Dostaneme tak grupu $\pi_n(X, A, a_0)$ – to je n-tá (relatívna) homotopická grupa páru (X, A) s referenčným bodom a_0. Ak $A \neq \emptyset$, tak grupa $\pi_n(X, A, a_0)$ je komutatívna pre $n \geq 3$ (a vtedy sa zvyčajne zapisuje aditívne). Grupa $\pi_2(X, A, a_0)$ je vo všeobecnosti nekomutatívna. Špeciálne, $\pi_n(X, \{a_0\}, a_0) = \pi_n(X, a_0)$, $\pi_n(X, X, a_0) = 0$.

Pre dva páry priestorov s referenčným bodom, povedzme (X, A) s referenčným bodom a_0 a (Y, B) s referenčným bodom b_0, spojité zobrazenie $\alpha : X \to Y$, pre ktoré $\alpha(A) \subset B$ a $\alpha(a_0) = b_0$ indukuje homomorfizmus

$$\alpha_\# : \pi_n(X, A, a_0) \to \pi_n(Y, B, b_0),$$

podobne ako v „absolútnom“ prípade. Podobne tiež identické zobrazenie indukuje identický homomorfizmus a zloženie spojitých zobrazení, spĺňajúcich očividné podmienky, indukuje zloženie príslušných homomorfizmov homotopických grúp párov, so zachovaním poradia. Homotopné (prípustným spôsobom) prípustné zobrazenia indukujú ten istý homomorfizmus homotopických grúp. Pojem homotopickej ekvivalentnosti priestorov s referenčným bodom sa dá zrejmým spôsobom pozmeniť tak, že dostaneme pojem homotopickej ekvivalentnosti párov priestorov s referenčným bodom. Ak $\alpha : X \to Y$ je homotopická ekvivalencia medzi párom (X, A) s referenčným bodom a_0 a párom (Y, B) s referenčným bodom b_0, tak indukovaný homomorfizmus homotopických grúp $\alpha_\# : \pi_n(X, A, a_0) \to \pi_n(Y, B, b_0)$ je izomorfizmus. Pritom tiež „obyčajná“ homotopická ekvivalencia párov $\beta : (X, A) \to (Y, B)$ indukuje izomorfizmus $\beta_\# : \pi_n(X, A, a) \to \pi_n(Y, B, \beta(a))$ pre každé $a \in A$. Podobne ako v absolútnom prípade môžeme v kategoriálnej reči povedať, že π_n (pre $n \geq 2$) je kovariantný funktor z kategórie párov topologických priestorov s referenčným bodom do kategórie grúp (resp. kategórie abelovských grúp, ak $n \geq 3$); možno ešte doplniť, že π_1 je kovariantný funktor z kategórie topologických priestorov s referenčným bodom do kategórie množín s referenčným prvkom.

Z ďalších vlastností homotopických grúp ešte spomenieme aspoň jednu, a to jestvovanie exaktnej postupnosti pre pár priestorov s referenčným bodom. Nech (X, A) je pár priestorov s referenčným bodom a_0. Potom identické zobrazenie $j : X \to X$ samozrejme spĺňa požiadavku, že $j(a_0) \in A$ a $j(a_0) = a_0$, a teda je to zobrazenie z páru $(X, \{a_0\})$ do páru (X, A) s referenčným bodom a_0. Preto máme pre $n \geq 2$ homomorfizmy

$$j_\# : \pi_n(X, \{a_0\}, a_0) = \pi_n(X, a_0) \to \pi_n(X, A, a_0).$$

Tiež inklúzia $i : A \hookrightarrow X$ samozrejme rešpektuje referenčný bod, a teda indukuje pre $n \geq 1$ homomorfizmus

$$i_{\#} : \pi_n(A, a_0) \to \pi_n(X, a_0).$$

Okrem toho sa ešte určitým prirodzeným spôsobom definuje zobrazenie (pre $n \geq 2$ je to homomorfizmus grúp)

$$\partial_n : \pi_n(X, A, a_0) \to \pi_{n-1}(A, a_0).$$

Pre každý pár (X, A) s referenčným bodom a_0 máme potom exaktnú postupnosť

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \pi_n(A, a_0) \xrightarrow{i_{\#}} \pi_n(X, a_0) \xrightarrow{j_{\#}} \pi_n(X, A, a_0) \longrightarrow \cdots,$$

pričom jej koniec je:

$$\cdots \longrightarrow \pi_1(X, A, a_0) \xrightarrow{\partial_1} \pi_0(A, a_0) \xrightarrow{i_{\#}} \pi_0(X, a_0).$$

Takpovediac hlavná časť exaktnej postupnosti páru (X, A), končiaca sa $\pi_1(X, a_0)$, pozostáva z homotopických grúp (v nej má exaktnosť štandardnú interpretáciu: pre každú grupu v tejto postupnosti sa jadro z nej vychádzajúceho homomorfizmu rovná obrazu homomorfizmu do nej prichádzajúceho). Spomínaný koniec však pozostáva iba z ***množín*** s referenčným prvkom. Jadro zobrazenia medzi množinami s referenčným prvkom sa pritom chápe ako vzor referenčného prvku. Exaktnosť koncovej časti exaktnej postupnosti páru (X, A) potom znamená, že jadro množinového zobrazenia ∂_1 sa rovná obrazu zobrazenia $j_{\#} : \pi_1(X, a_0) \to \pi_1(X, A, a_0)$ a jadro zobrazenia $i_{\#} : \pi_0(A, a_0) \to \pi_0(X, a_0)$ sa rovná obrazu zobrazenia $\partial_1 : \pi_1(X, A, a_0) \to \pi_0(A, a_0)$.

Homotopická grupa páru (X, A) je vždy asociovaná s nejakým referenčným bodom $a_0 \in A$. Avšak, ak priestor X je lineárne súvislý a tiež podpriestor $A \subset X$ je lineárne súvislý, tak pre všetky a_0, $a_1 \in A$ máme (všeobecne nekanonický) izomorfizmus $\pi_n(X, A, a_0) \cong \pi_n(X, A, a_1)$. Pre niektoré otázky je nekanonickosť tohto izomorfizmu dôležitá, ale keďže tu tak či onak nezachádzame do všetkých podrobností, v ďalšom budeme vynechávať referenčný bod z označenia homotopickej grupy lineárne súvislého priestoru (resp. páru lineárne súvislých priestorov), keď to budeme považovať za vhodné.

Príklad: pre n-rozmernú sféru S^n $(n \geq 1)$ máme n-tú homotopickú grupu $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ (z čoho vidno nekontraktibilnosť S^n). Ešte dodáme, že pre $i \leq n-1$ je i-ta homotopická grupa $\pi_i(S^n)$ triviálna, ale – na rozdiel od homologických grúp – vo všeobecnosti *nie je pravda*, že $\pi_i(S^n) = 0$ pre $i \geq n+1$. Napr. ([**22**, Ch. 7, Sec. 2]) $\pi_3(S^2) \neq 0$.

Z toho, že prvky grupy $\pi_n(X)$ $(n \geq 1)$ sa dajú reprezentovať zobrazeniami $S^n \to X$ a toho, že n-tá homologická grupa (s celočíselnými koeficientmi) sféry S^n je $H_n(S^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ vyplýva jestvovanie dôležitého spojiva medzi homotopickými a homologickými grupami, známeho ako Hurewiczov homomorfizmus. Pripomenieme jeho definíciu. V grupe $H_n(S^n; \mathbb{Z})$ vyberieme generátor (zodpovedajúci alebo -1, alebo $+1$ v grupe $\mathbb{Z}$), ktorý označme $[S^n]$. Tým vlastne sféru S^n orientujeme. Pre ľubovoľný prvok $[f] \in \pi_n(X)$, kde $f : S^n \to X$ je (spojité) zobrazenie, máme indukovaný homomorfizmus $f_* : H_n(S^n; \mathbb{Z}) \to H_n(X; \mathbb{Z})$, a definujeme $h_n([f]) = f_*([S^n])$. Priradenie

$$[f] \mapsto h_n([f])$$

nezávisí od výberu reprezentanta v triede $[f]$ a definuje homomorfizmus

$$h_n : \pi_n(X) \to H_n(X; \mathbb{Z}),$$

ktorý sa nazýva *Hurewiczov homomorfizmus.* Možno definovať tiež relatívnu verziu Hurewiczovho homomorfizmu

$$h_n : \pi_n(X, A, a_0) \to H_n(X, A; \mathbb{Z}).$$

Nasledujúca veta hovorí o tých vlastnostiach Hurewiczovho homomorfizmu, ktoré sú pre nás najdôležitejšie (obsažnejšiu verziu možno nájsť napr. v [**22**, Ch. 7, Sec. 5]). Pred jej sformulovaním ešte pripomenieme, že ak G je grupa, tak $[G, G]$ označuje komutátorovú podgrupu grupy G, teda podgrupu v G, generovanú prvkami tvaru $aba^{-1}b^{-1}$, pre všetky a, $b \in G$; dúfame, že význam označenia $[G, G]$ je vždy jasný z kontextu, a grupu $[G, G]$ si čitateľ nepomýli s podobne označenou množinou homotopických tried zobrazení z G do G.

HUREWICZOVA VETA O IZOMORFIZME. *Nech X je taký lineárne súvislý topologický priestor, že $\pi_k(X) = 0$ pre všetky $k < n$. Potom*

(a) *$H_k(X) = 0$ pre všetky také k, že $1 \leq k \leq n - 1$;*
(b) *ak $n \geq 2$, tak Hurewiczov homomorfizmus*

$$h_n : \pi_n(X) \to H_n(X; \mathbb{Z})$$

je izomorfizmus;
(c) *ak $n = 1$, tak $h_1 : \pi_1(X) \to H_1(X; \mathbb{Z})$ je epimorfizmus (surjektívny homomorfizmus), ktorého jadro možno stotožniť s komutátorovou podgrupou $[\pi_1(X), \pi_1(X)]$. Teda máme izomorfizmus prvej homologickej grupy priestoru X (s celočíselnými koeficientmi) a „prekomutovanej“ fundamentálnej grupy priestoru X,*

$$H_1(X; \mathbb{Z}) \cong \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)].$$

Navyše, ak $n \geq 2$ a podpriestor A priestoru X je lineárne súvislý, pričom $\pi_i(X, A, a_0) = 0$ pre $i \leq n - 1$, tak

$$h_n : \pi_n(X, A, a_0) \to H_n(X, A; \mathbb{Z})$$

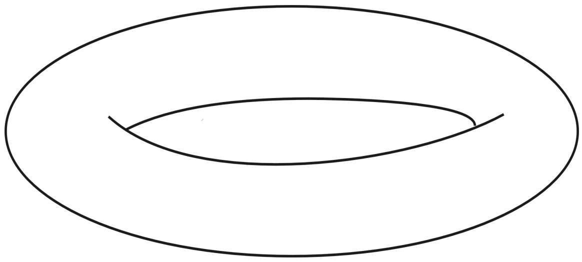
je epimorfizmus.

2. Symplekticky asférické variety

2.1. Topologická definícia symplekticky asférickej variety. Zaujímavú triedu topologických priestorov predstavujú *asférické priestory.* Sú to také lineárne súvislé priestory, že $\pi_n(X) = 0$ pre všetky $n \geq 2$. Nie je ťažké si domyslieť, odkiaľ pochádza názov „asférický“. Totiž, zvyčajne sa sférou rozumie S^2, S^3 atď., kým jednorozmerná sféra má osobitné pomenovanie – kružnica. To, že $\pi_n(X) = 0$ pre všetky $n \geq 2$ znamená, že žiadna zo sfér S^2, S^3 atď. sa nezobrazuje homotopicky netriviálne do priestoru X (samozrejme, ako vždy, máme na mysli iba zobrazovanie spojitými zobrazeniami!), a teda – voľne povedané – v X „nie sú žiadne sféry“, je *asférický.* Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ (znázornený na obr. 4) je príkladom asférického priestoru.

Pri *symplekticky asférickej variete* (M, ω) prirodzene hrá dôležitú úlohu symplektická forma ω. Voľne povedané, takáto varieta „neobsahuje sféry“– tentoraz však iba dvojrozmerné sféry – ktoré by sa správali netriviálne vo vzťahu k forme ω.

Pripomenieme, že ak (M^{2n}, ω) je symplektická varieta dimenzie $2n$ (napr. [**4**]), tak $\omega \in \Omega^2(M)$ je uzavretá ($d\omega = 0$) de Rhamova 2-forma na M, ktorá je *nedegenerovaná* (ináč povedané *regulárna*) ako bilineárna forma v tom zmysle, že ňou určená bilineárna forma na dotykovom priestore v každom bode $x \in M$, teda forma $\omega_x : T(M)_x \times T(M)_x \to \mathbb{R}$, je nedegenerovaná (alebo regulárna). Teda, ak máme $\omega_x(u, v) = 0$ pre všetky $v \in T(M)_x$, tak nevyhnutne u je nulový dotykový vektor (inými slovami, jediný vektor ω_x-kolmý na všetky vektory z $T(M)_x$ je nulový vektor). Ekvivalentne môžeme podmienku nedegenerovanosti sformulovať takto:



OBRÁZEK 4. Dvojrozmerný torus – príklad (aj symplekticky) asférickej plochy.

$\omega^n = \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n \text{ krát}} \in \Omega^{2n}(M)$ je objemová forma na M. Samozrejme, forma ω reprezentuje v de Rhamových kohomológiách variety M nenulovú kohomologickú triedu $[\omega] \in H^2(M;\mathbb{R})$, pričom $[\omega^n] = [\omega]^n \neq 0 \in H^{2n}(M;\mathbb{R})$.

Informáciu o vzťahu kohomológií s celočíselnými koeficientmi a kohomológií s reálnymi koeficientmi ľahko dostaneme z jednej z ústredných viet algebraickej topológie – vety o univerzálnych koeficientoch (napr. [**22**, Ch. 5, Sec. 5]). Keďže $\mathbb{R}$ je pole, táto veta dáva izomorfizmus

$$H^2(M;\mathbb{R}) \cong \mathrm{Hom}(H_2(M;\mathbb{Z}),\mathbb{R}),$$

kde $\mathrm{Hom}(A,B)$ označuje grupu homomorfizmov z grupy A do grupy B. Teda $[\omega]$ môžeme a budeme chápať ako homomorfizmus $H_2(M;\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$ (pritom vlastne stotožníme $H^2(M;\mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(H_2(M;\mathbb{Z}),\mathbb{R})$). Zároveň máme Hurewiczov homomorfizmus $h_2 : \pi_2(M) \to H_2(M;\mathbb{Z})$. Môžeme teda prijať nasledujúcu definíciu: hovoríme, že symplektická varieta (M^{2n},ω) je *symplekticky asférická*, ak sa $[\omega]$ anuluje (ako homomorfizmus $H_2(M;\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$) na podgrupe $h_2(\pi_2(M))$ grupy $H_2(M;\mathbb{Z})$; symbolicky vtedy napíšeme $[\omega]_{|\pi_2(M)} = 0$.

2.2. Geometrická charakterizácia symplekticky asférickej variety. Pozrime sa, čo táto podmienka symplektickej asférickosti znamená geometricky. Predovšetkým, izomorfizmus z vety o univerzálnych koeficientoch, spomenutý v 2.1, je prirodzený (ináč povedané, funktoriálny), a teda pre každé (spojité) zobrazenie $f : S^2 \to M$ máme komutatívny diagram

$$\begin{tikzcd} H^2(M;\mathbb{R}) \arrow[r, "\cong(=)"] \arrow[d, "f^*"'] & \mathrm{Hom}(H_2(M;\mathbb{Z}),\mathbb{R}) \arrow[d, "(f_*)^\#"] \\ H^2(S^2;\mathbb{R}) \arrow[r, "\cong(=)"] & \mathrm{Hom}(H_2(S^2;\mathbb{Z}),\mathbb{R}), \end{tikzcd}$$

kde f^* je homomorfizmus indukovaný zobrazením f v kohomológiách, f_* je homomorfizmus indukovaný zobrazením f v homológiách a zobrazenie $(f_*)^\#$ je definované tak, že $(f_*)^\#(\alpha) = \alpha \circ f_*$.

Ako vieme, zobrazenie $f : S^2 \to M$ definuje prvok $[f]$ homotopickej grupy $\pi_2(M)$. Symplektická asférickosť variety M teda znamená, že

$$[\omega](h_2([f])) = [\omega](f_*([S^2])) = (f_*)^\#([\omega])([S^2]) = 0.$$

Ale z komutatívnosti nášho diagramu vyplýva, že máme

$$[\omega](f_*([S^2])) = f^*([\omega])([S^2]).$$

Teda

$$0 = f^*([\omega])([S^2]) = [f^*(\omega)]([S^2]) = \int_{S^2} f^*(\omega),$$

a môžeme povedať, že symplektická varieta (M^{2n}, ω) je symplekticky asférická práve vtedy, keď pre každé zobrazenie $f : S^2 \to M$ je pravda, že

$$\int_{S^2} f^*(\omega) = 0.$$

Samozrejme, príkladom symplekticky asférickej variety je hociktorá taká symplektická varieta M, pre ktorú $\pi_2(M) = 0$. Konkrétny príklad symplekticky asférickej variety: dvojrozmerný torus (obr. 2), alebo aj $2n$-rozmerný torus $T^{2n} = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{2n\,\text{krát}}$.

Avšak existujú aj symplekticky asférické variety s netriviálnou druhou homotopickou grupou. Napríklad, 4-rozmerné uzavreté (to znamená kompaktné a bez okraja) variety tohto typu skonštruoval R. Gompf v [**7**].

Jestvuje (veľmi) veľa symplektických variet, ktoré nie sú symplekticky asférické. Naozaj (poz. [**11**, 1.3]), fundamentálna grupa symplekticky asférickej variety je vždy nekonečná, ale pritom, ako ukázal Gompf v [**6**], každá konečne (re)prezentovateľná grupa (teda každá grupa definovaná konečne veľa generátormi a konečne veľa reláciami medzi týmito generátormi) sa dá realizovať ako fundamentálna grupa uzavretej symplektickej variety. Kto by sa chcel dozvedieť niečo o klasifikácii grúp realizovateľných ako fundamentálne grupy symplekticky asférických variet, urobí dobre, keď si preštuduje práce [**11**] a [**12**].

3. Symplekticky asférické variety a Arnoľdova hypotéza

Pre symplekticky asférické variety sa podarilo dokázať zaujímavý výsledok, pôvodne sformulovaný V. I. Arnoľdom ako hypotéza, o počte pevných bodov hamiltonovských symplektomorfizmov na súvislej uzavretej symplektickej variete. Naším cieľom je stručne predstaviť túto problematiku. Predpokladáme, že čitateľ, ktorý sa bude zaujímať o ďalšie podrobnosti – či už o historické súvislosti, rôzne časti matematických teórií, ktoré tu môžeme naozaj iba načrtnúť, alebo o ďalší vývoj – si preštuduje pôvodné články (z ktorých viaceré citujeme v texte) a tiež knižné zdroje, z ktorých odporúčame najmä [**14**, Part IV] a [**2**, Ch. 8].

Najskôr sa pristavíme pri pojme hamiltonovského symplektomorfizmu.

3.1. Hamiltonovské symplektomorfizmy. Nech (M^{2n}, ω) je symplektická varieta. Jedným z bezprostredných dôsledkov nedegenerovanosti (regulárnosti) formy ω je aj existencia izomorfizmu medzi 1-formami na M a dotykovými vektorovými poľami na M, teda rezmi dotykovej fibrácie variety $T(M)$ variety M. Pri tomto izomorfizme vektorovému poľu $X : M \to T(M)$ (pripomeňme, že pre každý bod $p \in M$ je $X(p)$ dotykový vektor k variete M v bode p) zodpovedá 1-forma

$$i_X\omega(-) = \omega(X, -) : T(M) \to \mathbb{R}.$$

Odteraz budeme o každej symplektickej variete (M^{2n}, ω) predpokladať, že je súvislá a uzavretá. Pripomenieme, že difeomorfizmus medzi dvoma hladkými varietami M a N je „hladká obdoba homeomorfizmu“, teda také hladké bijektívne zobrazenie $f : M \to N$, ktorého inverzné zobrazenie $f^{-1} : N \to M$ je takisto hladké.

Symplektomorfizmus (alebo *symplektický difeomorfizmus*) Φ symplektickej variety (M^{2n}, ω) na seba sa definuje ako taký hladký (ako vždy v tomto texte, hladký znamená diferencovateľný triedy C^∞) difeomorfizmus $\Phi : M \to M$, ktorý zachováva formu ω, teda pre ktorý indukovaná forma $\Phi^*(\omega)$ sa rovná forme ω. Symplektomorfizmus $\Phi : M \to M$ sa nazýva *hamiltonovský*, ak existuje taká *hamiltonovská izotópia* (spomeňme si na homotópiu, o ktorej sme hovorili v časti 1.1) $\{\Psi_t : M \to M\}_{t\in\mathbb{R}}$, že $\Psi_0 = \mathrm{id}_M$ a $\Psi_1 = \Phi$. Pritom to, že systém zobrazení $\{\Psi_t : M \to M\}_{t\in\mathbb{R}}$ je hamiltonovská izotópia znamená, že spĺňa nasledujúce štyri podmienky:

(1) systém $\{\Psi_t : M \to M\}_{t \in \mathbb{R}}$ je hladký v tom zmysle, že zobrazenie $\Psi : M \times \mathbb{R} \to M$, $\Psi(x,t) = \Psi_t(x)$, je hladké (hovoríme tiež, že Ψ je hladká izotópia od Ψ_0 ku Ψ_1);
(2) pre každé $t \in \mathbb{R}$ je Ψ_t symplektomorfizmus variety M na seba;
(3) existuje taký jednoznačne určený systém vektorových polí $X_t : M \to T(M)$, že
$$\frac{d}{dt}\Psi_t = X_t \circ \Psi_t$$
pre všetky $t \in \mathbb{R}$ (keďže každé zo zobrazení Ψ_t je symplektomorfizmus, vektorové polia X_t sú symplektické, čo znamená, že máme $di_{X_t}\omega = 0$ – teda 1-formy $i_{X_t}\omega$ sú uzavreté pre všetky $t \in \mathbb{R}$);
(4) všetky 1-formy $i_{X_t}\omega$ sú nielen uzavreté, ale aj exaktné. V dôsledku toho existuje hladký systém hamiltonovských funkcií $\{H_t : M \to \mathbb{R}\}_{t \in \mathbb{R}}$ (jeho hladkosť znamená, že zobrazenie $H : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H(x,t) = H_t(x)$, je hladké) takých, že pre každé $t \in \mathbb{R}$ máme
$$i_{X_t}\omega = dH_t.$$
Teda X_t je *hamiltonovské vektorové pole*, združené (asociované) s H_t pre každé $t \in \mathbb{R}$; systém $\{H_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ je ***časovo závislá*** (alebo *parametrizovaná*) hamiltonovská funkcia na M.

Poznamenáme, že nie všetky symplektické difeomorfizmy symplektickej variety M na seba sú hamiltonovské. Napríklad (poz. [**15**]), dvojrozmerný torus $T^2 = S^1 \times S^1$ môžeme ako hladkú varietu stotožniť tiež s faktorovou varietou $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Potom priradenie $(x,y) \mapsto (x + \frac{1}{2}, y)$ definuje otočenie, ktoré je symplektickým, ale nie je hamiltonovským symplektomorfizmom na tore.

3.2. Arnoľdova hypotéza. V 60-tych rokoch 20. storočia ruský matematik V. I. Arnoľd sformuloval hypotézu, ktorá podnietila rozsiahly ďalší výskum v symplektickej geometrii a topológii, trvajúci vlastne až doteraz. *Arnoľdova hypotéza* pôvodne hovorila iba o určitých difeomorfizmoch dvojrozmerného toru T^2 na seba, ale neskôr sa ustálila v nasledujúcej podobe.

ARNOĽDOVA HYPOTÉZA. *Nech (M,ω) je (súvislá a uzavretá) symplektická varieta. Nech* $\mathrm{Crit}(M)$ *označuje minimálny počet kritických bodov každej hladkej reálnej funkcie $M \to \mathbb{R}$ (ak $f : M \to \mathbb{R}$ je hocijaká hladká reálna funkcia na M, tak počet takých bodov $x \in M$, že diferenciál $df_x : T(M)_x \to T(\mathbb{R})_{f(x)} \cong \mathbb{R}$ je nulové zobrazenie je aspoň* $\mathrm{Crit}(M)$*). Nech $\Phi : M \to M$ je hocijaký hamiltonovský symplektomorfizmus variety M na seba, a nech* $\mathrm{Fix}(\Phi)$ *označuje počet jeho pevných bodov (teda takých $x \in M$, že $\Phi(x) = x$). Potom*
$$\mathrm{Fix}(\Phi) \geq \mathrm{Crit}(M).$$

Poznamenáme, že hamiltonovskosť symplektomorfizmu je v tejto hypotéze podstatná, lebo napr. nehamiltonovský symplektomorfizmus otočenia na dvojrozmernom tore, ktorý sme spomínali na konci časti 3.1, samozrejme nemá ani jeden pevný bod.

Postupom času sa podarilo dokázať rôzne špeciálne prípady Arnoľdovej hypotézy a niekoľko jej upravených verzií. Najskôr okolo roku 1979 Y. Eliashberg dokázal geometrickými prostriedkami Arnoľdovu hypotézu pre riemannovské plochy. Potom ju okolo roku 1983 overili C. Conley a E. Zehnder pre torus ľubovoľnej párnej dimenzie. Ďalej napríklad H. Hofer v roku 1988 v práci [**9**] dokázal, že ak $\pi_2(M) = 0$, tak
$$\mathrm{Fix}(\Phi) \geq 1 + \mathrm{cup}(M),$$
kde $\mathrm{cup}(M)$ je kohomologická dĺžka variety M (to je najväčšie také c, že jestvujú v kladných dimenziách také kohomologické triedy $a_1, \ldots, a_c$, že ich kohomologický

súčin $a_1 \cup \cdots \cup a_c$ je nenulový; určité formuly pre odhad a metódu hľadania hodnoty $\mathrm{cup}(M)$ možno nájsť v [**13**]). Je známe, že (pre ľubovoľnú uzavretú varietu) máme

$$\mathrm{Crit}(M) \geq 1 + \mathrm{cup}(M),$$

a teda Hofer vlastne dokázal slabšiu verziu Arnoľdovej hypotézy (predpokladajúc triviálnosť druhej homotopickej grupy). Podobný výsledok odvodil v roku 1989 A. Floer v [**5**]. K. Ono v roku 1995 v práci [**17**] dokázal Arnoľdovu hypotézu pre slabo monotónne symplektické variety (také, ktoré spĺňali určitú podmienku súvisiacu s druhou homotopickou grupou) atď.

Ale nepochybne zaujímavú triedu variet, pre ktoré sa podarilo dokázať Arnoľdovu hypotézu takpovediac v plnej sile, predstavujú práve symplekticky asférické variety. Tento dôkaz, ktorý koncom 90-tych rokov 20. storočia zavŕšil Yu. Rudyak ([**19**]), v určitých fázach spolupracujúci s J. Opreom ([**20**]), nadviazal na úsilie a výsledky viacerých matematikov. Analytická časť Rudyakovho dôkazu, ktorý neskôr stručne načrtneme, využíva najmä Floerove a Hoferove výsledky. Zároveň tento dôkaz podstatným spôsobom buduje na prostriedkoch a metódach algebraickej topológie, najmä teórie homotópií, osobitne teórie Ľusternikovej-Šnireľmanovej (Lyusternikovej-Shnireľmanovej) kategórie topologického priestoru resp. zobrazenia.

3.3. Niektoré ďalšie myšlienky a fakty z algebraickej topológie. V tejto časti pripomenieme niektoré ďalšie definície a vlastnosti topologickej povahy, ktoré sa nám neskôr zídu.

Povieme (napr. [**2**]), že Ľusternikova-Šnireľmanova kategória (stručne: kategória) topologického priestoru $X \neq \emptyset$ je n, čo zapíšeme

$$\mathrm{cat}(X) = n,$$

ak sa X dá pokryť $n+1$ otvorenými podmnožinami, z ktorých každá je kontraktibilná v X, ale X sa nedá pokryť n otvorenými podmnožinami, z ktorých každá je kontraktibilná v X. Pritom podmnožina V v X je kontraktibilná v X, ak jestvuje taký bod $x_0 \in X$, že inklúzia $i : V \hookrightarrow X$, $i(x) = x$, je homotopná s konštantným zobrazením $c : V \to X$, $c(x) = x_0$. Napríklad, kontraktibilný priestor má Ľusternikovu-Šnireľmanovu kategóriu 0. Ďalší príklad: pre n-sféru S^n $(n \geq 0)$ máme $\mathrm{cat}(S^n) = 1$. Naozaj, to vyplýva z nekontraktibilnosti S^n (1.2) a toho, že ako dve pokrývajúce otvorené podmnožiny kontraktibilné (v sebe, a tým skôr) v S^n stačí zobrať S^n bez „severného pólu“, resp. S^n bez „južného pólu“, teda $S^n \setminus \{(0,\ldots,0,1)\}$ a $S^n \setminus \{(0,\ldots,0,-1)\}$. Každý z týchto podpriestorov je homeomorfný – prostredníctvom stereografickej projekcie zo severného resp. južného pólu – s priestorom $\mathbb{R}^n$.

Všeobecnejšie sa definuje Ľusternikova-Šnireľmanova kategória (stručne: kategória) zobrazenia ([**2**]): kategória zobrazenia $f : X \to Y$ (kde $X \neq \emptyset$) je najmenšie také k, že $X = U_1 \cup \cdots \cup U_{k+1}$, kde množiny $U_i \subset X$ sú otvorené v X a navyše zúženie $f_{|U_i}$ je homotopné s konštantným zobrazením pre každé $i = 1, \ldots, k+1$. Kategóriu zobrazenia f budeme označovať $\mathrm{cat}(f)$. Samozrejme, špeciálne máme $\mathrm{cat}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{cat}(X)$. Pre zobrazenie $f : X \to Y$ medzi varietami (ale aj pre zobrazenia medzi všeobecnejšími priestormi) máme

$$\mathrm{cat}(f) \leq \mathrm{cat}(X) \leq \dim(X),$$

$$\mathrm{cat}(f) \leq \mathrm{cat}(Y).$$

Budeme tiež potrebovať pomerne nový pojem, ktorý sa používa iba približne od 90-tych rokov minulého storočia, a to kategoriálnu váhu danej kohomologickej triedy. Presnejšie, v roku 1992 E. Fadell a S. Husseini vo svojom článku [**3**] definovali kategoriálnu váhu (v úsilí o zlepšenie odhadu Ľusternikovej-Šnireľmanovej kategórie s využitím kohomologického okruhu), avšak tak, že nie je homotopickým invariantom (čo veľmi obmedzuje prostriedky použiteľné na jej výpočet). Homotopicky invariantnú verziu kategoriálnej váhy (jej definíciu uvedieme o chvíľu) zaviedol Yu. Rudyak vo svojej prednáške v American Mathematical Society Summer Research Institute, Seattle, v roku 1996. Na odlíšenie od Faddelovej-Husseiniho kategoriálnej váhy ju nazval striktná kategoriálna váha (po anglicky, strict category weight); poz. [**18**].

Striktnú kategoriálnu váhu kohomologickej triedy $u \in H^*(X;R)$ (kde R je okruh, X je hausdorffovský parakompaktný priestor) označíme $swgt(u)$ a definujeme ju ako

$$\sup\{k; f^*(u) = 0 \text{ pre všetky také } f : A \to X \text{ že} \operatorname{cat}(f) \leq k-1\},$$

kde A prebieha cez všetky hausdorffovské parakompaktné priestory. Pritom, ak $u = 0$, tak $swgt(u) = \infty$.

Striktná kategoriálna váha je homotopicky invariantná, teda máme $swgt(u) = swgt(h^*(u))$ pre každú homotopickú ekvivalenciu h. Pre naše potreby najdôležitejšie ďalšie vlastnosti striktnej kategoriálnej váhy sú (poz. [**18**], [**19**]):

(v1) $\operatorname{cat}(X) \geq \operatorname{swgt}(u)$ pre všetky nenulové $u \in H^*(X;\mathbb{R})$;

(v2) nech $f : Y \to X$ je také, že $f^*(u) \neq 0$ pre nejaké $u \in H^*(X;R)$. Potom $\operatorname{cat}(f) \geq \operatorname{swgt}(u)$ a $\operatorname{swgt}(f^*(u)) \geq \operatorname{swgt}(u)$.

(v3) $\operatorname{swgt}(x \cup y) \geq \operatorname{swgt}(x) + \operatorname{swgt}(y)$, kde

$$\cup : H^i(X, A; R) \times H^j(X, B; R) \to H^{i+j}(X, A \cup B; R)$$

je kohomologický súčin (pričom sa žiada, aby dvojica $\{A, B\}$ vyhovovala axióme vyrezania (excízie) v X; poz. napríklad [**22**]).

Ďalšie dve vlastnosti kategoriálnej váhy pridáme trocha neskôr.

Ďalej pripomenieme z teórie homotópií (napr. [**22**, Ch. 8, Sec. 1]), že pre $n = 1$ a ľubovoľnú grupu G, resp. pre každé prirodzené číslo $n > 1$ a ľubovoľnú komutatívnu grupu G existuje (jediný, odhliadnuc od homotopickej ekvivalencie) lineárne súvislý priestor $K(G, n)$ taký, že homotopické grupy $\pi_i(K(G, n))$ sú triviálne pre všetky $i \neq n$, a $\pi_n(K(G, n)) \cong G$. Priestor $K(G, n)$ sa nazýva *Eilenbergov-MacLaneov priestor*. Napríklad, odhliadnuc od homotopickej ekvivalencie, môžeme povedať, že $K(\mathbb{Z}, 1)$ je kružnica S^1, $K(\mathbb{Z}_2, 1)$ je reálny nekonečnorozmerný projektívny priestor $\mathbb{R}P^\infty$, $K(\mathbb{Z}, 2)$ je komplexný nekonečnorozmerný projektívny priestor $\mathbb{C}P^\infty$.

Nech teraz M je súvislá uzavretá varieta, nie nevyhnutne symplektická (v skutočnosti sa predpoklady o M dajú ešte viac oslabiť, ale to nie je pre nás dôležité). Nech $\tilde{M}$ je univerzálny nakrývajúci priestor variety M, a nech $p : \tilde{M} \to M$ je univerzálne nakrytie. Teda $\pi_1(\tilde{M}) = 0$ a grupa nakrývajúcich transformácií tohto nakrytia je izomorfná s fundamentálnou grupou $\pi_1(M)$. Potom $K(\pi_1(M), 1)$ je vlastne klasifikujúci priestor grupy $\pi_1(M)$, existuje univerzálna fibrácia nad ním, a z nej sa fibrácia $p : \tilde{M} \to M$ indukuje klasifikujúcim zobrazením (ktoré je, odhliadnuc od homotópie, určené jednoznačne) $f : M \to K(\pi_1(M), 1)$. Zobrazenie f je charakterizované tým, že indukovaný homomorfizmus fundamentálnych grúp, $f_\# : \pi_1(M) \to \pi_1(K(\pi_1(M), 1))$, je izomorfizmus, a dá sa o ňom tiež dokázať, že indukuje izomorfizmy

$$H_1(M;\mathbb{Z}) \cong H_1(K(\pi_1(M), 1);\mathbb{Z}),$$
$$H_2(M;\mathbb{Z})/\operatorname{Im}(h_2) \cong H_2(K(\pi_1(M), 1);\mathbb{Z}),$$

kde $\operatorname{Im}(h_2)$ je obraz Hurewiczovho homomorfizmu.

Naozaj, prvý z týchto dvoch izomorfizmov je zrejmý, keďže – ako vieme z časti (c) Hurewiczovej vety (poz. 1.2) – prvá homologická grupa $H_1(M;\mathbb{Z})$ je vlastne „prekomutovaná“ fundamentálna grupa $\pi_1(M)$.

Pri dôkaze druhého zo spomenutých izomorfizmov môžeme a budeme (keďže odhliadame od homotopickej ekvivalencie) zobrazenie $f : M \to K(\pi_1(M), 1)$ brať ako inklúziu (napr. [**22**, Chap. 1]). Namiesto $K(\pi_1(M), 1)$ budeme ďalej písať iba K.

Teda potom môžeme uvažovať o topologickom páre (K, M) (s inklúziou $f : M \hookrightarrow K$). Z exaktnej homotopickej postupnosti páru (K, M), v ktorej $\pi_1(M) \to \pi_1(K)$ je izomorfizmus, dostávame, že $\pi_1(K, M)$ je jednoprvková množina – symbolicky (hoci to nie je grupa) napíšeme $\pi_1(K, M) = 0$.

Súčasťou exaktnej homotopickej postupnosti páru (K, M) je tiež exaktná postupnosť

$$\pi_2(K) \longrightarrow \pi_2(K, M) \xrightarrow{0} \pi_1(M) \xrightarrow{\cong} \pi_1(K)\ .$$

Z nej ($\pi_2(K) = 0$) dostávame, že homomorfizmus $\pi_2(K, M) \to \pi_1(M)$ musí byť triviálny, pričom má byť tiež injektívny (jadro je $\pi_2(K) = 0$). Ale to je možné iba tak, že $\pi_2(K, M) = 0$.

Z funktoriálnosti Hurewiczovho homomorfizmu vyplýva, že máme nasledujúci „homotopicko-homologický“ komutatívny diagram s exaktnými riadkami (ktoré sú časťami exaktnej homotopickej resp. homologickej postupnosti):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & \pi_3(K,M) \arrow[r, "\partial_\#", "\cong"'] \arrow[d, "h_3"] & \pi_2(M) \arrow[r] \arrow[d, "h_2"] & 0 \arrow[d] & \\
H_3(K;\mathbb{Z}) \arrow[r] & H_3(K,M;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\partial_*"] & H_2(M;\mathbb{Z}) \arrow[r, "f^*"] & H_2(K;\mathbb{Z}) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Z toho, že $\pi_1(K, M) = 0$, $\pi_2(K, M) = 0$ a z Hurewiczovej vety vyplýva, že $h_3 : \pi_3(K, M) \to H_3(K, M; \mathbb{Z})$ je surjekcia, pričom tiež $H_1(K, M; \mathbb{Z}) = 0$ a $H_2(K, M; \mathbb{Z}) = 0$. Potom z uvedeného komutatívneho diagramu dostaneme, že

$$\mathrm{Im}(\partial_*) = \mathrm{Im}(\partial_* \circ h_3) = \mathrm{Im}(h_2 \circ \partial_\#) = \mathrm{Im}(h_2),$$

keďže $\partial_\#$ je izomorfizmus. Z toho vyplýva, že naozaj máme

$$\begin{aligned}
H_2(M;\mathbb{Z})/\,\mathrm{Im}(h_2) &\cong H_2(M;\mathbb{Z})/\,\mathrm{Im}(\partial_*) \cong \\
&\cong H_2(M;\mathbb{Z})/\,\mathrm{Ker}(f_*) \cong \\
&\cong H_2(K;\mathbb{Z}),
\end{aligned}$$

keďže $f^* : H_2(M; \mathbb{Z}) \to H_2(K; \mathbb{Z})$ je epimorfizmus.

Teraz môžeme pre symplekticky asférickú varietu (M^{2n}, ω) podmienku $\omega_{|\pi_2(M)} = 0$ vyjadriť ináč, a to takto.

PODMIENKA. *Podmienka $\omega_{|\pi_2(M)} = 0$ je splnená práve vtedy, keď jestvuje taká kohomologická trieda $\omega_K \in H^2(K; \mathbb{R})$, že $f^*(\omega_K) = [\omega]$.*

Naozaj, najskôr predpokladajme, že pre nejaký prvok $\omega_K \in H^2(K; \mathbb{R})$ máme $f^*(\omega_K) = [\omega]$. Z „homotopicko-homologického“ diagramu, o ktorom sme hovorili pred chvíľou, vieme, že $\mathrm{Im}(\partial_*) = \mathrm{Im}(h_2)$. Preto máme $f_* \circ h_2 = 0$ (keďže $\mathrm{Ker}(f_*) = \mathrm{Im}(\partial_*) = \mathrm{Im}(h_2)$). Z prirodzenosti (funktoriálnosti) izomorfizmu, ktorý máme z vety o univerzálnych koeficientoch dostávame komutatívny diagram

$$\begin{tikzcd}
H^2(K;\mathbb{R}) \arrow[r, "\cong(=)"] \arrow[d, "f^*"'] & \mathrm{Hom}(H_2(K;\mathbb{Z}),\mathbb{R}) \arrow[d, "(f_*)^\#"] \\
H^2(M;\mathbb{R}) \arrow[r, "\cong(=)"] & \mathrm{Hom}(H_2(M;\mathbb{Z}),\mathbb{R}).
\end{tikzcd}$$

Teraz pre ľubovoľný prvok $z \in \pi_2(M)$ rátajme hodnotu $[\omega](h_2(z))$. Budeme mať, samozrejme po stotožnení $H^2(K; \mathbb{R})$ s $\mathrm{Hom}(H_2(K; \mathbb{Z}), \mathbb{R})$, resp. stotožnení $H^2(M; \mathbb{R})$ s $\mathrm{Hom}(H_2(M; \mathbb{Z}), \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
[\omega](h_2(z)) &= f^*(\omega_K)(h_2(z)) = (f_*)^\#(\omega_K)(h_2(z)) = \\
&= \omega_K \circ f_*(h_2(z)) = \omega_K(f_* \circ h_2(z)) = \omega_K(0) = 0,
\end{aligned}$$

keďže $f_* \circ h_2 = 0$.

Ešte dokážeme opačnú implikáciu. Predpokladajme, že $\omega_{|\pi_2(M)} = 0$, a teda máme $[\omega](h_2(z)) = 0$ pre každé $z \in \pi_2(M)$. Definujme kohomologickú triedu $\omega_K \in H^2(K;\mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(H_2(K;\mathbb{Z}),\mathbb{R})$ takto. Vieme, že

$$H_2(K;\mathbb{Z}) \cong H_2(M;\mathbb{Z})/\operatorname{Ker}(f_*) \cong H_2(M;\mathbb{Z})/\operatorname{Im}(h_2).$$

Pre každé $x \in H_2(K;\mathbb{Z})$ definujeme

$$\omega_K(x) = [\omega](y),$$

kde $y \in H_2(M;\mathbb{Z})$ je (hociktoré) také, že $f_*(y) = x$. Takto je ω_K dobre definované, lebo ak $f_*(y) = x = f_*(y')$, tak $y - y' \in \operatorname{Ker}(f_*)$, a teda $[\omega](y-y') = 0$, keďže $\operatorname{Ker}(f_*) = \operatorname{Im}(h_2)$ a $[\omega]_{|\operatorname{Im}(h_2)} = 0$. Samozrejme, priamo z definície máme $f^*(\omega_K) = [\omega]$ (lebo, pre každé $y \in H_2(M;\mathbb{Z})$, $f^*(\omega_K)(y) = (f_*)^{\#}(\omega_K)(y) = \omega_K \circ f_*(y) = [\omega](y)$).

3.4. Ľusternikova-Šnireľmanova kategória symplekticky asférickej variety. Aby sme mohli určiť Ľusternikovu-Šnireľmanovu kategóriu (ľubovoľnej) symplekticky asférickej variety, potrebujeme k vlastnostiam (v1), (v2), (v3) striktnej kategoriálnej váhy pridať ešte ďalšie dve ([**19**]):

(v4) každý nenulový prvok z kohomologickej grupy $H^s(K(G,1);R)$, $s \geq 2$ (G je ľubovoľná (diskrétna) grupa, R je ľubovoľný komutatívny okruh) má striktnú kategoriálnu váhu aspoň s;

(v5) ak X je hausdorffovský parakompaktný topologický priestor a $g : X \to K(\pi_1(X),1)$ je také zobrazenie, že $g^*(\bar{a}) = a \neq 0$ pre nejaké $\bar{a} \in H^2(K(\pi_1(X),1);R)$ resp. $a \in H^2(X;R)$, tak $\operatorname{swgt}(a) \geq 2$.

Teraz už môžeme sformulovať a (vynechajúc dôkazy vlastností striktnej kategoriálnej váhy resp. Ľusternikovej-Šnireľmanovej kategórie) aj dokázať nasledujúcu vetu.

Veta o kategórii symplekticky asférickej variety. *Nech (M,ω) je $2n$-rozmerná súvislá uzavretá symplekticky asférická varieta. Potom* $\operatorname{cat}(M) = 2n$.

Načrtneme dôkaz tohto tvrdenia. Predovšetkým, máme $\omega_{|\pi_2(M)} = 0$. Teda, ako sme videli v 3.3, jestvuje taký prvok $\omega_K \in H^2(K;\mathbb{R})$, že $f^*(\omega_K) = [\omega] \neq 0$, kde $f : M \to K(\pi_1(M),1)$ je klasifikujúce zobrazenie univerzálneho nakrytia $p : \widetilde{M} \to M$. Keďže v kohomológiách indukovaný homomorfizmus f^* je homomorfizmom okruhov, máme potom

$$f^*(\omega_K{}^n) = [\omega]^n \neq 0.$$

S využitím vlastností striktnej kategoriálnej váhy dostávame (poz. (v5)), že $\operatorname{swgt}([\omega])$ je aspoň 2. Z toho vyplýva (poz. (v3)), že

$$\operatorname{swgt}([\omega]^n) \geq 2n,$$

a teda (poz. (v1))

$$\operatorname{cat}(M) \geq 2n.$$

Na druhej strane, vieme, že

$$\operatorname{cat}(M) \leq 2n,$$

a teda celkovo máme

$$\operatorname{cat}(M) = 2n.$$

Z tohto pre kritické body reálnych funkcií na symplekticky asférickej variete M^{2n} vyplýva, že

$$1 + 2n = 1 + \operatorname{cat}(M) \leq \operatorname{Crit}(M) \leq 1 + 2n,$$

a preto

$$\operatorname{Crit}(M) = 1 + 2n.$$

3.5. Záver: dôkaz Arnoľdovej hypotézy pre symplekticky asférické variety. Na to, aby sme dokázali Arnoľdovu hypotézu pre symplekticky asférické variety stačí už iba využiť nasledujúcu vetu, ktorá sa dá dokázať skombinovaním Floerových, Hoferových, Conleyho, Zehnderových a Rudyakových úvah a výsledkov. Pre lepšiu orientáciu v rôznych súvislostiach odporúčame pozrieť si [**2**, 8.2] alebo [**19**], vrátane poznámky 1 v tom istom článku o pôvodnej Floerovej podmienke ([**5**]), že má byť nielen $[\omega]_{|\pi_2(M)} = 0$, ale aj $c_{1|\pi_2(M)} = 0$, kde c_1 je prvá Chernova trieda (dotykovej fibrácie) variety M (pripomíname, že na dotykovej fibrácii variety (M^{2n}, ω) je prirodzená komplexná štruktúra J, kompatibilná so symplektickou formou ω v tom zmysle, že $\omega(\cdot, J\cdot)$ je riemannovská metrika na M). Ako zdroj informácií o Chernových a iných charakteristických triedach vektorových fibrácií odporúčame [**16**] a [**10**].

VETA. *Ak $\Phi : M \to M$ je hamiltonovský symplektomorfizmus, tak sa dá nájsť kompaktný metrický priestor X a také $\tau : X \to M$, že v kohomológiách indukovaný homomorfizmus $\tau^* : H^*(M; R) \to H^*(X; R)$ je monomorfizmus pre každý komutatívny okruh koeficientov R. Navyše máme*

$$\mathrm{Fix}(\Phi) \geq 1 + \mathrm{cat}(\tau).$$

Vďaka tejto vete už ľahko vidno, že ak (M^{2n}, ω) je súvislá uzavretá symplekticky asférická varieta a $\tau : X \to M$ je spomenuté zobrazenie, tak

$$\mathrm{cat}(M) = \mathrm{cat}(\tau) = \mathrm{Crit}(M) - 1.$$

Naozaj, máme $[\omega]^n \neq 0$, ale $\tau^* : H^*(M; R) \to H^*(X; R)$ je monomorfizmus, a teda tiež máme $\tau^*([\omega]^n) \neq 0$. Z vlastností striktnej kategoriálnej váhy potom vyplýva, že

$$2n = \mathrm{cat}(M) \geq \mathrm{cat}(\tau) \geq \mathrm{swgt}([\omega]^n) \geq 2n,$$

a tak napokon

$$\mathrm{cat}(M) = \mathrm{cat}(\tau) = 2n = \mathrm{Crit}(M) - 1.$$

Pre symplekticky asférické variety sa Arnoľdova hypotéza naplno potvrdila, keď Rudyak dokázal nasledujúcu vetu.

ARNOĽDOVA-RUDYAKOVA VETA. *Nech (M^{2n}, ω) je taká súvislá uzavretá symplektická varieta, že $\omega_{|\pi_2(M)} = 0$ (teda varieta M je symplekticky asférická). Potom máme pre každý hamiltonovský symplektomorfizmus $\Phi : M \to M$, že*

$$\mathrm{Fix}(\Phi) \geq \mathrm{Crit}(M) = 2n + 1.$$

Naozaj je to tak. Totiž, podľa toho, čo sme povedali, máme

$$\mathrm{Fix}(\Phi) \geq 1 + \mathrm{cat}(\tau) = 1 + 2n = 1 + \mathrm{Crit}(M) - 1 = \mathrm{Crit}(M).$$

Literatúra

[1] G. Bredon, Topology and Geometry, New York: Springer 1993.

[2] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea, D. Tanré, Lusternik-Schnirelmann Category, Providence, R. I.: Amer. Math. Soc. 2003.

[3] E. Fadell, S. Husseini, Category weight and Steenrod operations, Bol. Soc. Math. Mexicana 37 (1992), 151-161.

[4] M. Fecko, Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov, Bratislava: Iris 2004. Anglická verzia: Differential Geometry and Lie Groups for Physicists, Cambridge: Cambridge University Press 2006.

[5] A. Floer, Symplectic fixed points and holomorphic spheres, Commun. Math. Phys. 120 (1989), 575-611.

[6] R. Gompf, A new construction of symplectic manifolds, Ann. of Math. 142 (1995), 527-595.

[7] R. Gompf, On symplectically aspherical symplectic manifolds with nontrivial π_2, Math. Res. Lett. 5 (1999), 599-603.

[8] A. Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge: Cambridge Univ. Press 2002. Prístupná tiež na adrese http://www.math.cornell.edu/∼hatcher

[9] H. Hofer, Lusternik-Schnirelmann theory for Lagrangian intersections, Ann. Inst. H. Poincaré - Anal. Nonlin. 5 (1988), 465-499.

[10] D. Husemoller, Fibre Bundles, New York: McGraw Hill 1966.

[11] R. Ibáñez, J. Kędra, Yu. Rudyak, A. Tralle, On fundamental groups of symplectically aspherical manifolds, Math. Z. 248 (2004), 805-826.

[12] J. Kędra, Yu. Rudyak, A. Tralle, On fundamental groups of symplectically aspherical manifolds II: Abelian groups, Math. Z. 256 (2007), 825-835.

[13] J. Korbaš, Bounds for the cup-length of Poincaré spaces and their applications. Topology Appl. 153 (2006), no. 15, 2976-2986.

[14] D. McDuff, D. Salamon, Introduction to Symplectic Topology, Oxford: Clarendon Press 1998.

[15] D. McDuff, Recent developments in symplectic topology. European Congress of Mathematics, Vol. II (Budapest, 1996), pp. 28-42, Progr. Math., 169, Basel: Birkhäuser 1998.

[16] J. Milnor & J. Stasheff, Characteristic Classes, Princeton, N. J.: Princeton University Press 1974.

[17] K. Ono, On the Arnold conjecture for weakly monotone symplectic manifolds, Invent. Math. 119 (1995), 519-537.

[18] Yu. Rudyak, On category weight and its applications, Topology 38 (1999), 37-55.

[19] Yu. Rudyak, On strict category weight, gradient-like flows and the Arnold conjecture, Internat. Math. Research Notices 5 (2000), 271-279.

[20] Yu. Rudyak, J. Oprea, On the Lusternik-Schnirelmann category of symplectic manifolds and the Arnold conjecture. Math. Z. 230 (1999), 673-678.

[21] Yu. Rudyak, On analytical applications of stable homotopy (the Arnold conjecture, critical points), Math. Z. 230 (1999), 659-672.

[22] E. Spanier, Algebraic Topology, New York: McGraw-Hill 1966.

[23] N. Steenrod, The Topology of Fibre Bundles, Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press 1951.

[24] F. Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, New York: Springer 1983.